Joseph W. GOODMAN

introduction à l'optique de fourier et à l'holographie

MASSON & CIE

INTRODUCTION
A
L'OPTIQUE DE FOURIER
ET A L'HOLOGRAPHIE

CHEZ LE MÊME ÉDITEUR

L'INTÉGRALE DE FOURIER ET SES APPLICATIONS À L'OPTIQUE, PAR P. M. DUFFIEUX. 1970, 2e édition, 172 pages, 153 figures.

OPTIQUE. *Formation et traitement des images, par* M. FRANÇON. 1972, 160 pages, 202 figures.

DIFFRACTION. STRUCTURE DES IMAGES. *Influence de la cohérence de la lumière*, par A. MARÉCHAL et M. FRANÇON. 1970, 2e tirage, 204 pages, 149 figures, 10 tableaux.

HOLOGRAPHIE, par M. FRANÇON. 1969, 124 pages, 137 figures.

LES LASERS. *Principes, réalisations, applications*, par A. ORSZAG. 1968, 176 pages, 47 figures.

OPTIQUE PHYSIQUE, par J. ROIG *(Cours à l'usage de la licence et de la maîtrise)*. TOME I — *Propagation. Cohérence. Interférences.* 1967, 352 pages, 135 figures.

OPTIQUE, par G. BRUHAT *(Cours de physique générale, à l'usage de l'enseignement supérieur scientifique)*. 6e édition, par A. KASTLER. 1965, 1026 pages, 752 figures.

Joseph W. GOODMAN
Professeur à l'Université de Stanford (Californie)

INTRODUCTION
A
L'OPTIQUE DE FOURIER
ET A L'HOLOGRAPHIE

TRADUCTION FRANÇAISE
PAR
Christian DUROU et José-Philippe PEREZ
Maîtres-Assistants
Université Paul Sabatier, Toulouse

MASSON ET Cie, ÉDITEURS
120 Bd Saint-Germain, Paris (6°)
1972

L'édition originale de ce volume a été publiée sous le titre
INTRODUCTION TO FOURIER OPTICS
par MCGRAW-HILL BOOK COMPANY, *New York*

© 1968 by McGraw-Hill, Inc.

Tous droits de traduction, d'adaptation et de reproduction par tous procédés réservés pour tous pays.

La loi du 11 mars 1957 n'autorisant, aux termes des alinéas 2 et 3 de l'article 41, d'une part, que les « copies ou reproductions strictement réservées à l'usage privé du copiste et non destinées à une utilisation collective » et, d'autre part, que les analyses et les courtes citations dans un but d'exemple et d'illustration, « toute représentation ou reproduction intégrale, ou partielle, faite sans le consentement de l'auteur ou de ses ayants droit ou ayants cause, est illicite » (alinéa 1er de l'article 40).

Cette représentation ou reproduction, par quelque procédé que ce soit, constituerait donc une contrefaçon sanctionnée par les articles 425 et suivants du Code pénal.

© 1972, *Masson et Cie, Paris*
LIBRARY OF CONGRESS CATALOG CARD NUMBER : 72—76635

Imprimé en Hongrie

PRÉFACE

En écrivant cet ouvrage, j'ai essayé de concevoir un cours d'optique qui soit plus particulièrement destiné aux ingénieurs électroniciens. Comme chacun sait, il existe déjà plusieurs livres excellents consacrés aux applications à l'optique de l'analyse de Fourier et du concept de système linéaire. Cependant l'expérience m'a montré que ces ouvrages conviennent surtout aux physiciens familiarisés avec les principes de l'optique classique, mais beaucoup moins avec les techniques mathématiques appliquées de nos jours avec tant de profit à la théorie moderne de la formation des images. Par ailleurs, si les ingénieurs électroniciens sont très familiarisés avec ces techniques mathématiques, grâce à leur emploi intensif en analyse des circuits, ils le sont beaucoup moins avec les principes de l'optique classique. C'est pourquoi il m'a semblé raisonnable de présenter les principes de l'optique aux ingénieurs électroniciens en utilisant au maximum les outils mathématiques déjà à leur disposition. L'analyse de Fourier et la théorie des systèmes linéaires fournissent ainsi les bases sur lesquelles reposent la théorie de la formation des images, les méthodes de traitement optique de l'information et l'holographie.

L'ouvrage est issu d'une série de notes de cours relatives à un enseignement trimestriel de l'optique de Fourier au Department of Electrical Engineering *de l'Université de Stanford. Les étudiants étaient, pour la plupart, en première ou deuxième année d'études supérieures. Comme le contenu du cours augmentait à la suite des révisions successives de ces notes, il devint de plus en plus difficile de couvrir toute l'étendue du sujet dans les trente leçons d'un seul trimestre. De ce fait, dans les dernières versions de ce cours, j'ai estimé qu'il était nécessaire de supprimer (ou tout au plus de ne traiter que brièvement) les paragraphes suivants: 2-3, 3-5, 3-6, 4-3, 6-6, 7-7 et certaines parties de 8-8 et 8-9. Pour un cours s'étalant sur tout un semestre, il est probable qu'on pourrait utiliser la totalité de ces notes.*

De nombreuses personnes m'ont prodigué leur aide et leurs encouragements dans cette entreprise et je leur en suis reconnaissant. J'ai contracté une dette particulièrement importante envers les chercheurs du Radar and Optics Laboratory *de l'Université du Michigan, qui grâce à leurs publications et leurs contacts personnels ont stimulé mon intérêt pour l'optique et ont fortement influencé mon point de vue. Je suis plus particulièrement reconnaissant à* A. E. Seigman

et N. ABRAMSON, *de m'avoir prodigué les premiers encouragements au moment où j'en avais le plus besoin; à* E. L. O'NEILL, E. N. LEITH, L. J. CUTRONA *et* H. LOTSCH *d'avoir soigneusement revu le manuscrit et suggéré un certain nombre d'améliorations importantes; à* M. LEHMANN *qui a passé beaucoup de temps à réaliser des photographies qui constituent une partie vitale de l'ouvrage; à* D. W. JACKSON *et* W. H. HUNTLEY Jr. *avec qui j'ai eu de nombreuses discussions enrichissantes; à* Melle Alice LESCALLEET, *qui a dactylographié la plus grande partie du manuscrit; et aux nombreux étudiants qui ont contribué à instruire leur professeur. Enfin, je voudrais remercier ma femme, Hon Mai, sans la patience et les encouragements de laquelle ce livre ne serait jamais devenu une réalité.*

Joseph W. GOODMAN

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1. — *Introduction* 1
1-1 Optique et théorie des communications 1
1-2 L'ouvrage 2

CHAPITRE 2. — *Analyse des systèmes linéaires bidimensionnels* 5
2-1 Analyse de Fourier à deux dimensions 6
2-2 Les systèmes linéaires 16
2-3 Théorie de l'échantillonnage bidimensionnel 20

CHAPITRE 3. — *Les fondements de la théorie scalaire de la diffraction* 29
3-1 Introduction historique 32
3-2 Préliminaires mathématiques 32
3-3 Formulation selon Kirchhoff de la diffraction par un écran plan 35
3-4 Formulation selon Rayleigh et Sommerfeld de la diffraction par un écran plan 39
3-5 Généralisation de la théorie de Rayleigh—Sommerfeld aux ondes non monochromatiques 42
3-6 Diffraction par les bords 44
3-7 Le spectre angulaire d'ondes planes 45

CHAPITRE 4. — *Diffraction de Fresnel et diffraction de Franhofer* 53
4-1 Approximation du principe de Huyghens—Fresnel 53
4-2 Exemples de figures de diffraction de Franhofer 57
4-3 Exemple de figure de diffraction de Fresnel 66

CHAPITRE 5. — *Propriétés des lentilles relatives à la transformation de Fourier et à la formation des images* 73
5-1 La lentille mince considérée comme un transformateur de phase 73
5-2 Propriétés des lentilles relatives à la transformation de Fourier 78
5-3 Formation des images en éclairage monochromatique 84

CHAPITRE 6. — *Analyse fréquentielle des systèmes optiques formant des images* 93
6-1 Etude générale des systémes formant des images 101
6-2 Réponse fréquentielle d'un système optique limité par la diffaction — cas de l'éclairage cohérent 101
6-3 Réponse fréquentielle d'un système optique limité par la diffraction — cas de l'éclairage incohérent 103
6-4 Les aberrations et leurs effets sur la réponse fréquentielle 110
6-5 Etude comparative de la formation des images en lumière cohérente et en lumière incohérente 116
6-6 Résolution au-delà de la limite classique de la diffraction 122

CHAPITRE 7. — *Filtrage spatial et traitement optique de l'information* 129
7-1 Rappel historique 130
7-2 Le film photographique 136
7-3 Systèmes de traitement en lumiére incohérente basés sur l'optique géométrique 145
7-4 Synthèse dans le domaine des fréquences 150
7-5 Le filtre de Vander Lugt 155
7-6 Application à la reconnaissance des caractères 160
7-7 Application au traitement des données fournies par les antennes à ouverture synthétique 166

CHAPITRE 8. — ***Formation des images par reconstruction des surfaces d'ondes ou holographie*** 179

8-1 Introduction historique 179
8-2 Le problème de la reconstruction des surfaces d'onde 180
8-3 L'hologramme de Gabor 185
8-4 L'hologramme de Leith—Upatnieks 187
8-5 Effets de la FTM du film 202
8-6 Effets des non-linéarités du film 207
8-7 Effets de l'épaisseur de l'émulsion 217
8-8 Généralisations 220
8-9 Applications de l'holographie 227

Appendice 245

A- Les fonctions delta de Dirac 245
B- Démonstration des théorèmes relatifs à la transformation de Fourier 246

Index alphabétique 251

CHAPITRE PREMIER

INTRODUCTION

1-1. — OPTIQUE ET THÉORIE DES COMMUNICATIONS

Depuis la fin des années 30, l'optique, cette branche «vénérable» de la physique, a noué progressivement des liens de plus en plus étroits avec les sciences de la communication et de l'information, sciences qui relèvent de l' électronique. Cette tendance se comprend aisément car les systèmes de communication et les systèmes formant les images sont tous deux conçus pour recevoir ou acheminer de l'information. Dans le premier cas l'information est généralement de nature temporelle (par exemple, sous forme d'une tension ou d'un courant modulés) tandis que dans le second cas elle est de nature spatiale (par exemple une distribution d'amplitude ou d'intensité dans l'espace), mais d'un point de vue théorique cette différence est assez superficielle.

Le lien le plus fort entre les deux disciplines réside peut-être dans le fait qu'on peut utiliser le même genre de mathématiques pour décrire ces deux types de systèmes: les mathématiques de l'analyse de Fourier et de la théorie des «systèmes». La raison essentielle de l'utilisation de mathématiques semblables réside plutôt dans certaines propriétés fondamentales que partagent les systèmes de communication et les systèmes formant des images, que dans l'intérêt commun porté à «l'information». Par exemple de nombreux circuits électroniques et dispositifs formant des images possèdent en commun les propriétés de *linéarité et d'invariance* (on verra au chapitre 2 les définitions de ces termes). Tout réseau ou dispositif (électronique, optique ou autre) possédant ces deux propriétés, peut être décrit du point de vue mathématique avec beaucoup d'élégance si on utilise les techniques de *l'analyse fréquentielle*. Ainsi, de même qu'il convient de décrire un amplificateur d'audiofréquences au moyen de sa réponse en fréquences (temporelles) il convient souvent de décrire un système formant des images au moyen de sa réponse en fréquences (spatiales).

Même en l'absence de ces propriétés de linéarité et d'invariance certaines ressemblances subsistent. Les relations entre la grandeur d'entrée et la grandeur de sortie de certains éléments optiques non linéaires (en particulier le film photographique) sont tout à fait analogues aux caractéristiques correspondantes des composants électroniques non linéaires (diodes, tubes à vide, etc...); on peut appliquer dans les deux cas les mêmes méthodes mathématiques.

Il est particulièrement important de se rendre compte que la similitude des structures mathématiques peut être exploitée non seulement dans un but d'analyse mais aussi dans un but de *synthèse*. Ainsi, tout comme on peut agir sur le spectre d'une fonction

temporelle, on peut modifier à volonté le spectre d'une fonction spatiale. L'histoire récente de l'optique est riche en exemples de progrès importants réalisés grâce à l'application des techniques de la synthèse de Fourier: le microscope à contraste de phase de Zernike, les filtres optiques adaptés, et diverses techniques de renforcement du contraste, pour n'en mentionner que quelques uns. L'avenir montrera sans aucun doute de nombreux autres bienfaits du mariage des deux disciplines, bienfaits qui enrichiront à la fois l'optique et les sciences des communications.

1-2. — L'OUVRAGE

On suppose que les lecteurs de cet ouvrage possèdent au départ des bases assez solides en analyse de Fourier et en théorie des systèmes linéaires. Le chapitre 2 passe en revue les connaissances fondamentales nécessaires; afin d'éviter d'ennuyer ceux qui possèdent bien les bases de l'analyse des signaux temporels et des systèmes de communication, l'exposé est présenté pour des fonctions de deux variables indépendantes. De telles fonctions sont, naturellement, de première importance en optique et l'extension d'une variable à deux variables indépendentes enrichit encore la théorie mathématique en introduisant de nombreuses propriétés nouvelles qui n'ont pas de contre-partie directe dans la théorie des signaux et des systèmes électroniques.

Le phénomène physique appelé *diffraction* est de la plus haute importance dans la théorie des systèmes formant des images optiques. Le chapitre 3 expose les fondements de la théorie scalaire de la diffraction, en particulier les méthodes d'approche de Kirchhoff, de Rayleigh-Sommerfeld et du «spectre angulaire». Le chapitre 4 introduit certaines approximations des résultats généraux, à savoir les approximations de Fresnel et de Fraunhoffer, et présente des exemples de calcul des diagrammes de diffraction.

Les lentilles sont, évidemment, des éléments importants dans les systèmes de formation des images et de traitement optique de l'information. Le chapitre 5 est consacré aux lentilles et à leurs propriétés. L'action d'une lentille mince est représentée par une transformation de phase; la loi habituelle de conjugaison des lentilles est déduite de ce modèle, comme le sont aussi certaines propriétés des lentilles convergentes relatives à la transformation de Fourier.

Le chapitre 6 traite de l'application des techniques de l'analyse fréquentielle aux systèmes formant des images en lumière cohérente et en lumière incohérente. On y définit des fonctions de transfert appropriées dont on discute les propriétés pour des systèmes avec ou sans aberrations. Les systèmes cohérents et incohérents sont comparés à divers points de vue. On examine enfin les possibilités de résolution au-delà de la limite «classique» de la diffraction.

Au chapitre 7, où l'on étudie le filtrage spatial et le traitement optique de l'information, l'attention se porte sur des problèmes de synthèse. On présente d'abord le développement historique des idées concernant la synthèse de Fourier; vient ensuite une étude sommaire des propriétés fondamentales du film photographique. On examine les systèmes de traitement optique basés sur l'optique géométrique, après quoi on s'intéresse aux techniques bien plus puissantes de traitement dans le plan des fréquences. Une très large part est consacrée à ce que l'on appelle le «filtre de Vander Lugt» qui

permet de réaliser des fonctions de transfert à valeurs complexes au moyen de masques purement absorbants placés dans le plan des fréquences. Les applications essentielles que nous considérons sont la reconnaissance optique des caractères et le traitement optique des données relatives aux antennes à ouverture synthétisée.

Le dernier chapitre est consacré au problème de la formation des images par reconstruction de surfaces d'onde ou holographie. La reconstruction des surfaces d'onde est d'abord envisagée d'un point de vue très général, après quoi les techniques particulières développées par Gabor et par Leith et Upatnieks sont étudiées plus en détail. On présente également l'extension de ces méthodes à la photographie tridimensionnelle sans lentille. Les propriétés du film photographique et la manière dont elles affectent les images obtenues par reconstruction des surfaces d'onde sont examinées avec un intérêt particulier; l'attention se porte sur les effets de la limitation de la réponse en fréquences spatiales, de la non-linéarité, et de l'épaisseur de l'émulsion. Des généralisations à l'holographie des objets en mouvement, à l'holographie en lumière incohérente et aux hologrammes par réflexion sont aussi exposées. Enfin, on souligne les applications prometteuses de l'holographie qui s'étendent de la microscopie à la formation d'images à travers un milieu introduisant des aberrations.

CHAPITRE 2

ANALYSE DES SYSTÈMES LINÉAIRES BIDIMENSIONNELS

L'expérience montre que beaucoup de phénomènes physiques possèdent la propriété fondamentale suivante: leur réponse à plusieurs excitations agissant simultanément est la somme des réponses que chacune des excitations produirait si elle agissait seule. De tels phénomènes sont dits *linéaires* et la propriété qu'ils manifestent est appelée la *linéarité*. Les circuits électriques composés de résistances, de condensateurs et d'inductances sont très souvent linéaires pour une gamme étendue de signaux d'entrée. En outre, comme nous le verrons bientôt, la linéarité des équations d'onde décrivant la propagation de la lumière à travers la plupart des milieux nous conduit naturellement à considérer la formation des images optiques comme des transformations linéaires de la distribution lumineuse dite «objet» en la distribution lumineuse dite «image».

Cette seule propriété de linéarité conduit à une grande simplification dans la description mathématique de tels phénomènes et constitue la base d'un édifice mathématique que nous appellerons désormais *théorie des systèmes linéaires*. Le gros avantage que présente la linéarité est son aptitude à exprimer la réponse à une excitation compliquée (qui peut être une différence de potentiel, un courant, une amplitude lumineuse ou une intensité lumineuse) sous forme de termes qui sont les réponses à certaines excitations «élémentaires». Ainsi, lorsqu' on décompose une excitation en une combinaison linéaire d'excitations élémentaires, chacune d'elles produit une réponse connue, de forme simple; en vertu de la propriété de linéarité on peut alors trouver la réponse globale en formant la combinaison linéaire des réponses aux excitations élémentaires.

Dans ce chapitre nous passerons en revue quelques-uns des outils mathématiques très utiles dans la description des systèmes linéaires et nous présenterons quelques unes des décompositions mathématiques souvent employées dans l'analyse de ces phénomènes. Au cours des prochains chapitres nous considèrerons des excitations (grandeurs d'entrée du système) et des réponses (grandeurs de sortie du système) qui pourront être des grandeurs physiques de deux sortes. Si l'éclairage utilisé dans un système optique présente une propriété appelée *cohérence spatiale* nous verrons qu'il convient de considérer la lumière comme une distribution spatiale d'amplitude à *valeurs complexes*. Quand l'éclairage ne présente pas de cohérence spatiale, il convient de considérer la lumière comme une distribution spatiale d'intensité à *valeurs réelles*. Nous nous préoccuperons ici de l'analyse des systèmes linéaires à grandeur d'entrée complexe; les résultats relatifs aux entrées à valeurs réelles seront alors considérés comme des cas particuliers de cette théorie.

2-1. — ANALYSE DE FOURIER À DEUX DIMENSIONS

Un outil mathématique extrêmement utile pour l'étude des phénomènes à la fois linéaires et non linéaires est *l'analyse de Fourier*. Cet outil est très largement utilisé dans l'étude des circuits électriques et des systèmes de communication. On suppose que le lecteur a déjà rencontré la théorie de Fourier dans de telles applications et par conséquent qu'il est familiarisé avec l'analyse des fonctions à une seule variable (par exemple le temps). Pour un examen des concepts mathématiques fondamentaux le lecteur se reportera aux ouvrages de Papoulis (réf. 2-1) et Bracewell (réf. 2-2). Notre but se limite ici à familiariser le lecteur avec l'analyse des fonctions à deux variables indépendantes. On ne recherchera pas une grande rigueur mathématique et on adoptera plutôt la façon dont le sujet est traité dans les ouvrages destinés aux ingénieurs.

Définition et conditions d'existence. — La *transformée de Fourier* (ou *spectre de Fourier*, ou *spectre des fréquences*) d'une fonction complexe[1] $\mathbf{g}$ de deux variables indépendantes x et y, que nous noterons ici $\mathcal{F}\{\mathbf{g}\}$, est définie[2] par:

$$\mathcal{F}\{\mathbf{g}\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(x, y) \exp\left[-j\,2\pi(f_X x + f_Y y)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{2-1}$$

La transformée ainsi définie est elle-même une fonction à valeurs complexes de deux variables indépendantes f_x et f_y que nous considèrerons de manière générale comme des fréquences. D'une façon analogue la *transformée de Fourier inverse* d'une fonction $\mathbf{G}(f_x, f_y)$, que nous noterons $\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{G}\}$, est définie par:

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{G}\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{G}(f_X, f_Y) \exp\left[j\,2\pi(f_X x + f_Y y)\right] \mathrm{d}f_X\,\mathrm{d}f_Y \tag{2-2}$$

Remarquons que les transformations directe et inverse sont des opérations mathématiques tout à fait analogues et ne diffèrent que par le signe de l'exposant qui se trouve sous le signe somme.

Avant de discuter les propriétés de la transformée de Fourier et de son inverse, nous devons nous demander en premier lieu dans quelles conditions les définitions (2-1) et (2-2) ont en fait une signification. Pour certaines fonctions ces intégrales peuvent ne pas exister au sens mathématique du terme et par conséquent cette discussion serait incomplète si on ne mentionnait pas au moins brièvement les «conditions d'existence».

Parmi les divers ensembles possibles de conditions *suffisantes* d'existence de (2–1) nous retiendrons le suivant:

---

[1] Les lettres en caractères gras seront utilisées dorénavant pour indiquer qu'une fonction est à valeurs complexes.

[2] Lorsqu'une seule limite d'intérgastion apparaît au-dessus ou au-dessous du signe de double intégration, c'est que la limite applique aux *deux* intégrations.

1. **g** doit être absolument intégrable dans le plan infini xy.
2. **g** doit avoir seulement un nombre fini de discontinuités et un nombre fini de maxima et minima dans un rectangle quelconque de surface finie.
3. **g** ne doit pas avoir de discontinuités infinies.

En général l'une quelconque de ces conditions peut être atténuée à condition de renforcer l'une des conditions qui l'accompagnent ou même les deux, mais de telles considérations nous conduiraient beaucoup trop loin.

Comme Bracewell (réf. 2-2) l'a fait remarquer, «la possibilité physique est une condition de validité suffisante pour justifier l'existence d'une transformation». Cependant il est souvent commode, dans l'analyse des systèmes, de représenter les ondes physiques vraies par des fonctions mathématiques idéales; pour de telles fonctions une ou plusieurs des conditions d'existence précédentes peuvent ne pas être remplies. Par exemple, on représente couramment une grande impulsion de durée très courte par la fonction δ, appelée fonction de Dirac[1], définie par:

$$\delta(t) = \lim_{N \to \infty} N \exp(-N^2 \pi t^2)$$

De la même manière une source ponctuelle idéale de lumière est souvent représentée par la fonction équivalente à deux dimensions:

$$\delta(x, y) = \lim_{N \to \infty} N^2 \exp[-N^2 \pi (x^2 + y^2)] \tag{2-3}$$

De telles fonctions, infinies à l'origine et nulles partout ailleurs, présentent une discontinuité infinie et par conséquent ne satisfont pas à la troisième condition d'existence. On trouve aisément d'autres exemples importants: les fonctions $f(x, y) = 1$ et $f(x, y) = \cos(2\pi f_X x)$ ne satisfont pas, toutes les deux, à la première condition d'existence.

Si la majorité des fonctions qui nous intéressent doivent être incluses dans le cadre de l'analyse de Fourier, il est évident qu'il devient nécessaire de généraliser quelque peu la définition (2-1). Heureusement, il est souvent possible de trouver une transformation qui ait un sens pour des fonctions qui ne satisfont pas strictement aux conditions d'existence, pourvu que ces fonctions puissent être définies comme la limite d'une suite de fonctions transformables. En transformant chaque terme de cette suite, on engendre une nouvelle suite dont la limite est appelée *transformée de Fourier généralisée* de la fonction originale. On peut manipuler les transformées généralisées de la même façon que les transformées ordinaires et le plus souvent ignorer la distinction entre les deux cas, étant bien entendu que lorsqu'une fonction ne satisfait pas aux conditions d'existence et qu'on affirme malgré tout qu'elle a une transformée, c'est au sens de transformée généralisée qu'il faut l'entendre. Pour une discussion plus détaillée de cette généralisation de l'analyse de Fourier, on renvoie le lecteur à l'ouvrage de Lighthill (réf. 2-3).

A titre d'exemple calculons la transformée généralisée de la fonction de Dirac δ qui, on l'a vu, ne remplit pas la troisième condition d'existence. Remarquons que

---

[1] Pour une discussion plus détaillée de la fonction δ, voir le paragraphe A de l'appendice, où l'on propose plusieurs définitions possibles.

chaque terme de la suite (2-3) qui la définit satisfait effectivement aux conditions d'existence et qu'en fait chacun a une transformée de Fourier donnée par le Tableau 2-1.

$$\mathcal{F}\{N^2 \exp[-N^2\pi(x^2+y^2)]\} = \exp\left[-\frac{\pi(f_X^2+f_Y^2)}{N^2}\right]$$

La transformée généralisée de $\delta(x, y)$ est par suite:

$$\mathcal{F}\{\delta(x, y)\} = \lim_{N\to\infty}\left\{\exp\left[-\frac{\pi(f_X^2+f_Y^2)}{N^2}\right]\right\} \tag{2-4}$$

Il apparaît alors de façon évidente que le spectre de la fonction δ s'étend uniformément sur tout le domaine des fréquences.

Pour d'autres exemples de transformées généralisées on se reportera au Tableau 2-1.

La transformée de Fourier considérée comme une décomposition. — Comme nous l'avons déjà mentionné, quand on a affaire à des systèmes linéaires, il est souvent utile de décomposer un signal d'entrée compliqué en un certain nombre de signaux plus simples, de calculer la réponse du système à chacun de ces signaux «élémentaires» et de superposer ces différentes réponses pour trouver le signal de sortie. L'analyse de Fourier fournit un moyen fondamental pour réaliser une telle décomposition. Considérons la relation bien connue:

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(f) \exp(j\,2\pi ft)\, \mathrm{d}f.$$

Cette transformée inverse exprime la fonction g du temps au moyen de son spectre de fréquences. Nous pouvons considérer cette expression comme une décomposition de la fonction $g(t)$ en une combinaison linéaire (ici une intégrale) de fonctions élémentaires, chacune d'elles ayant la forme caractéristique $\exp(j2\pi ft)$. Le nombre complexe $\mathbf{G}(f)$ apparaît comme un simple facteur de pondération qui doit être appliquée à la fonction élémentaire de fréquence f pour obtenir la fonction $g(t)$.

De la même manière nous devons considérer la transformée de Fourier *bidimensionnelle* comme une décomposition d'une fonction $\mathbf{g}(x, y)$ en une combinaison linéaire de fonctions élémentaires de la forme $\exp[j2\pi(f_X x+f_Y y)]$. De telles fonctions présentent un certain nombre de propriétés intéressantes. Remarquons que pour un couple particulier de fréquences (f_X, f_Y) la fonction élémentaire correspondante a une phase nulle le long de droites définies par $y = -\dfrac{f_X}{f_Y}x + \dfrac{n}{f_Y}$ (n étant un nombre entier). Ainsi, comme l'indique la figure 2-1, cette fonction élémentaire peut être considérée comme étant «orientée», dans le plan xy, suivant une direction faisant avec l'axe des x l'angle θ tel que:

$$\theta = \mathrm{Arctg}\left(\frac{f_Y}{f_X}\right) \tag{2-5}$$

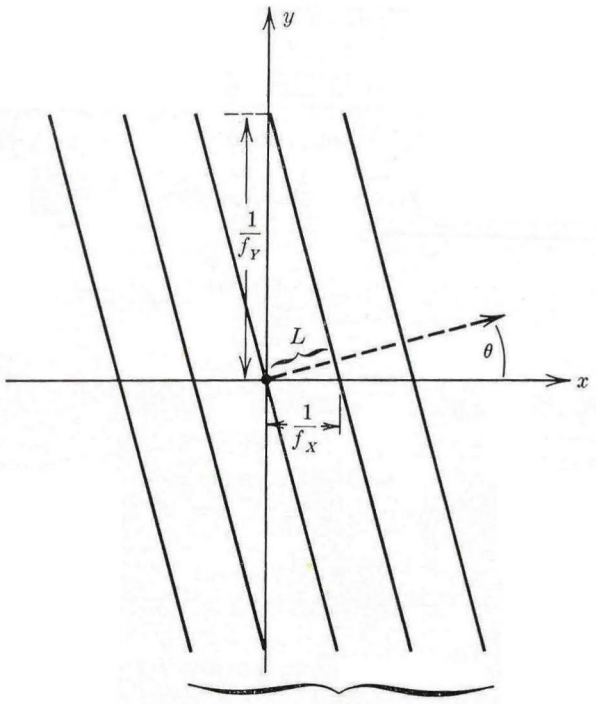


FIG. 2-1. – *Droites de phase nulle de la fonction exp* $[j\,2\pi(f_X x + f_Y y)]$

En outre la période *spatiale* (c'est-à-dire la distance entre les droites de phase nulle) est donnée par:

$$L = \frac{1}{\sqrt{f_X^2 + f_Y^2}} \tag{2-6}$$

En conclusion, nous devons donc, ici encore, considérer que la transformée de Fourier inverse constitue un mode de décomposition des fonctions mathématiques. Le spectre de Fourier **G** d'une fonction **g** est donc simplement l'ensemble des facteurs de pondération que l'on doit appliquer à chacune des fonctions élémentaires pour restituer la fonction **g**. L'avantage réel de l'utilisation de cette décomposition n'apparaîtra de façon évidente que lors de notre discussion relative aux systèmes linéaires invariants.

Théorèmes concernant la transformation de Fourier. — La définition fondamentale (2-1) de la transformée de Fourier permet de bâtir un riche édifice mathématique autour de cette transformation. Nous allons considérer à présent quelques-unes des propriétés mathématiques de la transformée, propriétés que nous utiliserons largement par la suite. Ces propriétés sont présentées comme des théorèmes mathématiques suivis d'un bref exposé relatif à leur signification physique. Comme ces théorèmes sont des extensions directes des énoncés analogues à ceux concernant la transformée de Fourier à une seule dimension, les démonstrations ont été renvoyées en appendice.

1. — *Théorème de linéarité.* — $\mathcal{F}\{\alpha\mathbf{g}+\beta\mathbf{h}\} = \alpha\mathcal{F}\{\mathbf{g}\}+\beta\mathcal{F}\{\mathbf{h}\}$. La transformée d'une somme de deux fonctions est simplement la somme de leurs transformées respectives.

2. — *Théorème de similitude.* — Si $\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x, y)\} = \mathbf{G}(f_X, f_Y)$,

alors
$$\mathcal{F}\{\mathbf{g}(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|}\,\mathbf{G}\frac{f_X}{a}, \frac{f_Y}{b}$$

Une «dilatation» des coordonnées dans le domaine spatial (x, y) se traduit par une contraction des coordonnées dans le domaine des fréquences $f_X f_Y$ et par un changement d'amplitude du spectre tout entier.

3. — *Théorème de translation.* — Si $\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x, y)\} = \mathbf{G}(f_X, f_Y)$

alors
$$\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x-a, y-b)\} = \mathbf{G}(f_X, f_Y)\exp[-j\,2\pi(f_X a+f_Y b)]$$

Une translation d'une fonction dans le domaine spatial introduit donc une variation de phase linéaire dans le domaine des fréquences.

4. — *Théorème de Parseval.* — Si $\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x, y)\} = \mathbf{G}(f_X, f_Y)$

alors
$$\int_{-\infty}^{\infty}\int |\mathbf{g}(x, y)|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\int |\mathbf{G}(f_X, f_Y)|^2\,\mathrm{d}f_X\,\mathrm{d}f_Y$$

Ce théorème est généralement interprété comme une expression de la conservation de l'énergie.

5. — *Théorème relatif à la convolution.* — Si $\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x, y)\} = \mathbf{G}(f_X, f_Y)$
et $\mathcal{F}\{\mathbf{h}(x, y)\} = \mathbf{H}(f_X, f_Y)$

alors
$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(\xi, \eta)\,\mathbf{h}(x-\xi, y-\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\right\} = \mathbf{G}(f_X, f_Y)\cdot\mathbf{H}(f_X, f_Y)$$

La convolution de deux fonctions dans le domaine spatial (opération que l'on rencontrera souvent dans la théorie des systèmes linéaires) est équivalente à l'opération plus simple que constitue la multiplication de leurs transformées respectives.

6. — *Théorème relatif à l'autocorrélation.* — Si $\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x, y)\} = \mathbf{G}(f_X, f_Y)$

alors
$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(\xi, \eta)\,\mathbf{g}^*(\xi-x, \eta-y)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\right\} = |\mathbf{G}(f_X, f_Y)|^2$$

De la même manière:
$$\mathcal{F}\{|\mathbf{g}(\xi, \eta)|^2\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{G}(\xi, \eta)\,\mathbf{G}^*(\xi-f_X, \eta-f_Y)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta.$$

Ce théorème peut être considéré comme un cas particulier du théorème relatif à la convolution.

7. — *Théorème de réciprocité.* — En chaque point où $\mathbf{g}$ est continue
$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{g}(x, y)\} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x, y)\} = \mathbf{g}(x, y)$.

En chaque point où $\mathbf{g}$ est discontinue, les deux transformées successives donnent la moyenne *angulaire* de la valeur de $\mathbf{g}$ au voisinage immédiat de ce point. Par suite, la

succession de la transformation directe et de la transformation inverse d'une fonction restitue cette fonction sauf aux points de discontinuité.

Les théorèmes ci-dessus relatifs aux transformées ont bien plus qu'un simple intérêt théorique. Ils seront utilisés fréquemment car ils constituent des outils fondamentaux pour la manipulation des transformées de Fourier; ils peuvent éviter un travail considérable dans la recherche des solutions des problèmes d'analyse de Fourier.

Fonctions séparables. — Une fonction de deux variables indépendantes est dite *séparable* relativement à un système particulier de coordonnées si on peut l'écrire sous forme d'un produit de deux fonctions, chacune d'entre elles dépendant d'une seule variable indépendante. Ainsi une fonction $\mathbf{g}$ est séparable dans le système de coordonnées rectangulaires (x, y) si:

$$\mathbf{g}(x, y) = \mathbf{g}_x(x) \cdot \mathbf{g}_y(y) \tag{2-7}$$

alors qu'elle est séparable dans le système de coordonnées polaires (r, θ) si:

$$\mathbf{g}(r, \theta) = \mathbf{g}_R(r) \cdot \mathbf{g}_\Theta(\theta) \tag{2-8}$$

Les fonctions séparables sont souvent plus commodes à traiter que les fonctions plus générales car la séparation permet souvent de réduire les opérations bidimensionnelles compliquées à des opérations unidimensionnelles plus simples. Par exemple, une fonction séparable en coordonnées rectangulaires possède la propriété particulièrement simple suivante: sa transformée de Fourier bidimensionnelle s'exprime par le produit de deux transformées de Fourier unidimensionnelles, ainsi que le montre de façon évidente la relation:

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x, y)\} &= \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(x, y) \exp\left[-j\,2\pi(f_X x + f_Y y)\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}_x(x) \exp\left[-j\,2\pi f_X x\right] \mathrm{d}x \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}_y(y) \exp\left[-j\,2\pi f_Y y\right] \mathrm{d}y \\
&= \mathcal{F}_X\{\mathbf{g}_x\} \cdot \mathcal{F}_Y\{\mathbf{g}_y\}
\end{aligned} \tag{2-9}$$

Ainsi la transformée de $\mathbf{g}$ est elle-même séparable en un produit de deux facteurs, l'un n'étant fonction que de f_x, le second que de f_y, et la détermination de la transformée bidimensionnelle se réduit à une succession de transformations unidimensionnelles plus familières.

Les fonctions séparables en coordonnées polaires ne sont pas aussi faciles à traiter que les précédentes, mais on montre qu'il est possible, en général, d'effectuer les opérations bidimensionnelles à l'aide de transformées unidimensionnelles. A titre d'exemple, on traite dans les problèmes (Pb. 2-7) la transformation de Fourier d'une fonction séparable en coordonnées polaires; on demande au lecteur de vérifier que le spectre bidimensionnel peut être obtenu en effectuant une série d'opérations unidimensionnelles appelées *transformations de Hankel.*

Fonctions à symétrie circulaire: transformations de Fourier-Bessel. — La classe la plus simple des fonctions séparables en coordonnées polaires est peut-être constituée

par les fonctions possédant la symétrie circulaire. On dit que la fonction $\mathbf{g}$ est à symétrie circulaire si on peut l'écrire comme une fonction de la seule variable r, soit:

$$\mathbf{g}(r, \theta) = \mathbf{g}_R(r) \tag{2.10}$$

De telles fonctions jouent un rôle particulièrement important dans les problèmes qui nous intéressent, car la plupart des systèmes optiques possèdent précisément ce type de symétrie. Nous accorderons donc une place particulière au problème de la transformation de Fourier d'une fonction à symétrie circulaire.

La transformée de Fourier de $\mathbf{g}$ dans un système de coordonnées rectangulaires est, bien sûr, donnée par:

$$\mathbf{G}(f_X, f_Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(x, y) \exp\left[-j\,2\pi(f_X x + f_Y y)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{2-11}$$

Pour exploiter complètement la symétrie circulaire de $\mathbf{g}$ nous passerons en coordonnées polaires à la fois dans les plans (x, y) et (f_x, f_y); ainsi:

$$\left.\begin{aligned} r &= \sqrt{x^2+y^2} & x &= r\cos\theta \\ \theta &= \mathrm{Arctg}\left(\frac{y}{x}\right) & y &= r\sin\theta \\ \varrho &= \sqrt{f_X^2+f_Y^2} & f_x &= \varrho\cos\phi \\ \phi &= \mathrm{Arctg}\left(\frac{f_Y}{f_X}\right) & f_y &= \varrho\sin\phi \end{aligned}\right\} \tag{2-12}$$

Ecrivons la transformée comme étant à la fois une fonction du rayon et de l'angle:

$$\mathcal{F}\{\mathbf{g}\} = \mathbf{G}_0(\varrho, \phi)$$

En appliquant les formules de transformations de coordonnées (2-12) à l'équation (2-11) la transformée de Fourier de $\mathbf{g}$ s'écrit:

$$\mathbf{G}_0(\varrho, \phi) = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^{\infty} \mathrm{d}r \cdot r\mathbf{g}_R(r) \exp\left[-j\,2\pi r\varrho(\cos\theta\cos\phi + \sin\theta\sin\phi)\right]$$

ou encore:

$$\mathbf{G}_0(\varrho, \phi) = \int_0^{\infty} r\,\mathrm{d}r\mathbf{g}_R(r) \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \exp\left[-j\,2\pi r\varrho\cos(\theta-\phi)\right] \tag{2-13}$$

Utilisons enfin, pour simplifier l'expression de la transformée, l'identité relative à la fonction de Bessel:

$$J_0(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \exp\left[-ja\cos(\theta-\phi)\right] \mathrm{d}\theta \tag{2-14}$$

J_0 est une fonction de Bessel de première espèce, d'ordre zéro.

En substituant (2-14) dans (2-13) on voit que la transformée ne dépend plus de l'angle ϕ ce qui donne pour G_0, fonction du rayon ϱ, l'expression suivante:

$$\mathbf{G}_0(\varrho) = 2\pi \int_0^\infty r\mathbf{g}_R(r)\, J_0(2\pi r\varrho)\, \mathrm{d}r \tag{2-15}$$

Ainsi la transformée de Fourier d'une fonction à symétrie circulaire est elle-même à symétrie circulaire et on peut la calculer à l'aide de l'opération à une dimension (2-15). Cette forme particulière de la transformée de Fourier revient assez fréquemment pour justifier une désignation spéciale. Aussi appellerons-nous l'expression (2-15) *transformée de Fourier-Bessel* ou bien *transformée de Hankel d'ordre zéro*. Pour abréger nous adopterons la première terminologie.

Par une démonstration identique à la précédente, on montre que la transformée de Fourier *inverse* d'une fonction à symétrie circulaire $G_0(\varrho)$ peut s'exprimer par:

$$\mathbf{g}_R(r) = 2\pi \int_0^\infty \varrho\mathbf{G}_0(\varrho)\, J_0(2\pi\varrho r)\, \mathrm{d}\varrho$$

Ainsi pour des fonctions à symétrie circulaire il n'y a pas de différence entre les transformations directe et inverse.

En utilisant la notation $\mathcal{B}\{\ \}$ pour représenter la transformation de Fourier-Bessel, il découle directement du théorème de réciprocité que

$$\mathcal{B}\cdot\mathcal{B}^{-1}\{\mathbf{g}_R(r)\} = \mathcal{B}\cdot\mathcal{B}\{\mathbf{g}_R(r)\} = \mathbf{g}_R(r)$$

pour chaque valeur de r où $\mathbf{g}_R(r)$ est con-tinue. En outre on montre que

$$\mathcal{B}\{\mathbf{g}_R(ar)\} = \frac{1}{a^2}\,\mathbf{G}_0\left(\frac{\varrho}{a}\right)$$

en appliquant directement le théorème de *similitude* (voir Pb. 2-4).

En utilisant l'expression (2-15) de la transformée de Fourier-Bessel le lecteur se souviendra qu'elle n'est rien de plus qu'un cas particulier de la transformée de Fourier à deux dimensions et par conséquent que toute propriété classique de la transformée de Fourier a son analogue parmi les propriétés de la transformation de Fourier-Bessel.

Quelques fonctions fréquemment utilisées et quelques couples utiles de transformées de Fourier. — Un bon nombre de fonctions mathématiques se trouveront si souvent employées dans la suite de l'ouvrage qu'on évitera une perte de temps considérable et bien des efforts inutiles en leur attribuant des notations particulières. En conséquence nous adopterons les définitions suivantes de quelques fonctions fréquemment utilisées:

— fonction «rectangle»

$$\text{rect}\,(x) = \begin{cases} 1 & |x| \leqslant \dfrac{1}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

— fonction «sinc»

$$\text{sinc}\,(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$$

— fonction «signe»

$$\text{sgn}\,(x) = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ 0 & x = 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

— fonction «triangle»

$$\text{tri}\,(x) = \begin{cases} 1-|x| & |x| \leqslant 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

— fonction «peigne»

$$\text{pgn}\,(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(x-n)$$

— fonction «cercle»

$$\text{circ}\left(\sqrt{x^2+y^2}\right) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2+y^2} \leqslant 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Les cinq premières de ces fonctions, représentées sur la figure 2-2, sont toutes des fonctions d'une seule variable; cependant on peut former un grand nombre de fonctions séparables sur un espace à deux dimensions, en effectuant divers produits

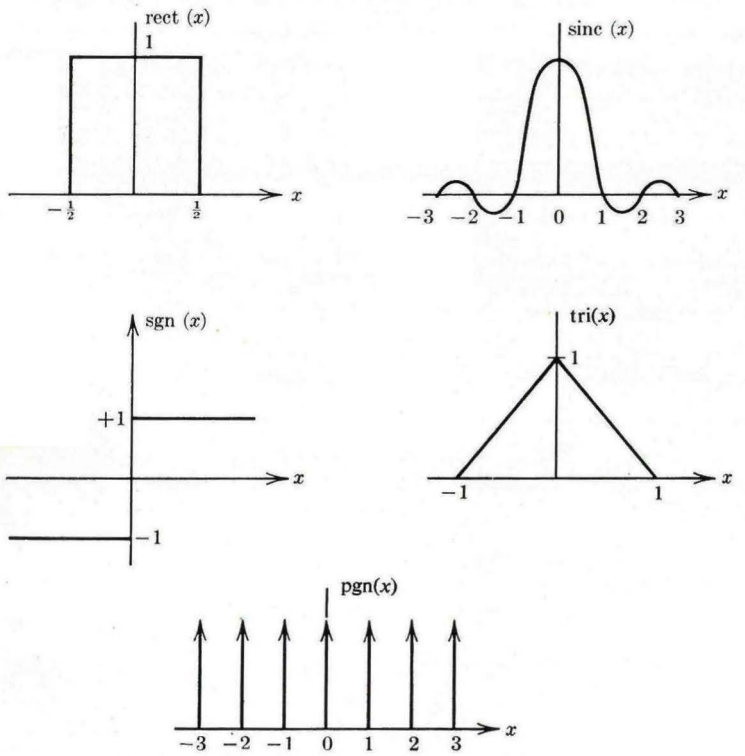


FIG. 2-2. – *Quelques fonctions particulières.*

de ces fonctions. La fonction cercle n'existe bien sûr que dans le cas de deux variables indépendantes; elle est schématisée sur la figure 2-3.

Pour terminer cette discussion relative à l'analyse de Fourier nous présentons quelques couples de transformées bidimensionnelles caractéristiques. Le Tableau 2-1 donne la liste d'un certain nombre de transformées de fonctions séparables en coordonnées rectangulaires. Comme on peut trouver directement les transformées de telles fonctions en formant le produit de transformées unidimensionnelles connues, on laisse au lecteur le soin de démontrer ces relations (voir Pb. 2-2).

TABLEAU 2–1. – Couples de transformées relatifs à quelques fonctions séparables en coordonnées rectangulaires.

Fonction	*Transformée*
$\exp[-\pi(x^2+y^2)]$	$\exp[-\pi(f_X^2+f_Y^2)]$
$\text{rect}(x)\cdot\text{rect}(y)$	$\text{sinc}(f_X)\cdot\text{sinc}(f_Y)$
$\text{tri}(x)\cdot\text{tri}(y)$	$\text{sinc}^2(f_X)\cdot\text{sinc}^2(f_Y)$
$\delta(x, y)$	1
$\exp[j\pi(x+y)]$	$\delta\left[\left(f_X-\frac{1}{2}\right)\left(f_Y-\frac{1}{2}\right)\right]$
$\text{sgn}(x)\cdot\text{sgn}(y)$	$\frac{1}{j\pi f_X}\cdot\frac{1}{j\pi f_Y}$
$\text{pgn}(x)\cdot\text{pgn}(y)$	$\text{pgn}(f_X)\cdot\text{pgn}(f_Y)$

Par contre on ne peut pas obtenir simplement les transformées de la plupart des fonctions à symétrie circulaire à partir de transformées unidimensionnelles connues. La fonction à symétrie circulaire la plus fréquemment rencontrée est:

$$\text{circ}(r) = \begin{cases} 1 & r \leqslant 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Nous allons donc déterminer la transformée de cette fonction. En utilisant l'expression (2-15) de la transformation de Fourier-Bessel, la transformée de la fonction cercle peut s'écrire:

$$\mathcal{B}\{\text{circ}(r)\} = 2\pi \int_0^1 rJ_0(2\pi r\varrho)\,\mathrm{d}r$$

Compte tenu du changement de variables $r' = 2\pi r\varrho$ et de l'identité

$$\int_0^x \xi J_0(\xi)\,\mathrm{d}\xi = xJ_1(x)$$

la transformée prend la forme:

$$\mathcal{B}\{\text{circ}(r)\} = \frac{1}{2\pi\varrho^2}\int_0^{2\pi\varrho} r'J_0(r')\,\mathrm{d}r' = \frac{J_1(2\pi\varrho)}{\varrho} \qquad (2\text{-}16)$$

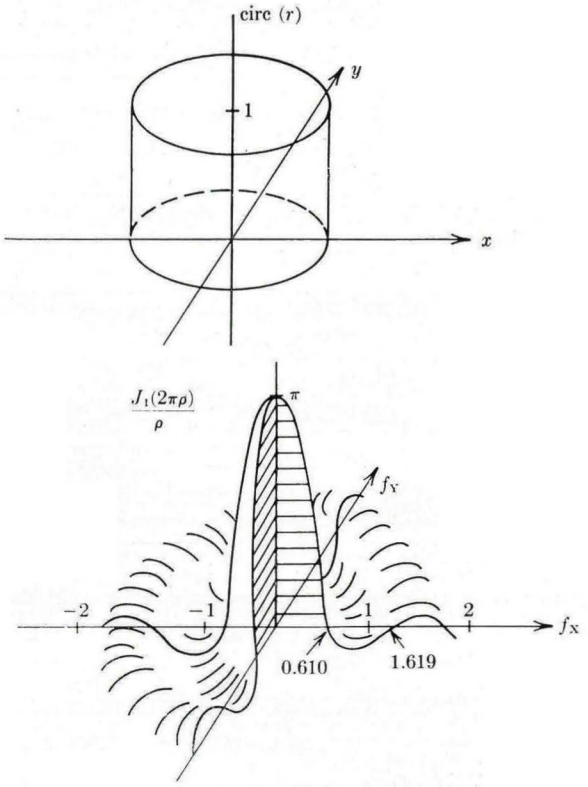


FIG. 2-3. – *La fonction cercle et sa transformée.*

où J_1 est une fonction de Bessel de première espèce, d'ordre un. La figure 2-3 schématise la fonction cercle et sa transformée. Notons que la transformée est à symétrie circulaire comme on pouvait le prévoir, et se compose d'un pic central et d'une série d'anneaux concentriques, d'amplitude décroissante. Remarquons que les zéros de la transformée ne sont pas également espacés le long d'un rayon.

Pour un certain nombre d'autres couples de transformées de Fourier-Bessel on renvoie le lecteur aux problèmes (voir Pb. 2-4).

2-2. – LES SYSTÈMES LINÉAIRES

Cherchons à définir le mot *système* d'une façon suffisamment générale pour inclure à la fois le cas familier des circuits électriques et le cas moins connu des systèmes formant des images optiques. Un système est défini comme une transformation d'un ensemble de fonctions d'entrées en un ensemble de fonctions de sortie. Dans le cas des circuits électriques, les entrées et les sorties sont des fonctions réelles (tensions ou courants) d'une seule variable (le temps); dans le cas de systèmes formant des images, les entrées et les sorties peuvent être des fonctions à valeurs réelles (intensité) ou à valeurs complexes (amplitude) de deux variables spatiales indépendantes.

Comme nous l'avons déjà dit, la question de savoir si c'est l'intensité ou l'amplitude du champ que l'on doit considérer comme variable du système sera envisagée plus loin.

Si nous nous limitons au cas de systèmes non aléatoires, une signal d'entrée déterminé doit alors donner une signal de sortie unique. Il n'est pas nécessaire, cependant, que chaque sortie corresponde à une seule entrée, car comme nous le verrons, plusieurs fonctions d'entrées peuvent n'avoir *aucune* sortie. Aussi ne considérons nous pour commencer que les systèmes pour lesquels la transformation est une «application» au sens mathématique du terme de l'ensemble des fonctions d'entrée sur l'ensemble des fonctions de sortie.

On représente commodément un système par un opérateur mathématique $\mathcal{S}\{\ \}$ qui est sensé agir sur des fonctions d'entrée pour donner des fonctions de sortie. Si nous représentons l'entrée du système par la fonction $\mathbf{g}_1(x_1, y_1)$ et la sortie correspondante par $\mathbf{g}_2(x_2, y_2)$, par définition de $\mathcal{S}\{\ \}$, ces deux fonctions sont reliées par:

$$\mathbf{g}_2(x_2, y_2) = \mathcal{S}\{\mathbf{g}_1(x_1, y_1)\} \tag{2-17}$$

Il est difficile d'énoncer ici d'autres propriété que celles qu'exprime la relation 2-17. Dans tout ce qui suit nous considèrerons essentiellement, mais non exclusivement, la classe réduite des systèmes dits *linéaires*. On constatera que l'hypothèse de la linéarité donne, pour de tels systèmes, des représentations simples et très significatives du point de vue physique; elle nous conduira aussi à établir et à développer des relations très utiles entre l'entrée et la sortie.

Linéarité et intégrale de superposition. — On dit qu'un système est *linéaire* si, étant donné deux fonctions d'entrée **t** et **s** et deux constantes complexes **a** et **b**, la propriété suivante, dite de superposition, est satisfaite:

$$\mathcal{S}\{\mathbf{as}(x_1, y_1)+\mathbf{bt}(x_1, y_1)\} = \mathbf{a}\mathcal{S}\{\mathbf{s}(x_1, y_1)\}+\mathbf{b}\mathcal{S}\{\mathbf{t}(x_1, y_1)\} \tag{2-18}$$

Rappelons le gros avantage que présente la linéarité: elle permet d'exprimer la réponse d'un système à une fonction d'entrée quelconque sous forme de réponses à certaines fonctions «élémentaires» en lesquelles l'entrée a pu être décomposée. Il est donc du plus haut intérêt de trouver un moyen simple et commode pour décomposer la fonction d'entrée. Une telle décomposition est possible grâce à la propriété suivante de la fonction δ (voir le paragraphe A de l'appendice):

$$\mathbf{g}_1(x_1, y_1) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}_1(\xi, \eta)\, \delta(x_1-\xi, y_1-\eta)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta \tag{2-19}$$

On peut considérer que, dans cette expression, $\mathbf{g}_1$ est une combinaison linéaire de fonctions δ pondérées et décalées les unes par rapport aux autres, les fonctions élémentaires de la décomposition étant précisément ces fonctions δ.

Pour trouver la réponse du système au signal d'entrée $\mathbf{g}_1$ substituons (2-19) dans (2-17):

$$\mathbf{g}_2(x_2, y_2) = \mathcal{S}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}_1(\xi, \eta)\, \delta(x_1-\xi, y_1-\eta)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\right\}$$

Le nombre $\mathbf{g}_1(\xi, \eta)$ étant un simple facteur de pondération appliqué à la fonction élémentaire $\delta(x_1-\xi, y_1-\eta)$, il est possible, d'après la propriété de linéarité (2-18), de faire agir l'opérateur sur les fonctions élémentaires; l'opérateur $\mathcal{S}\{\ \}$ entre ainsi sous le signe somme, ce qui donne:

$$\mathbf{g}_2(x_2, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}_1(\xi, \eta)\, \mathcal{S}\{\delta(x_1-\xi, y_1-\eta)\}\, d\xi\, d\eta$$

Pour terminer, notons $\mathbf{h}(x_2, y_2; \xi, \eta)$ la réponse du système au point de coordonnées (x_2, y_2) de l'espace de sortie, lorsque l'entrée est une fonction δ située au point (ξ, η) de l'espace d'entrée, soit:

$$\mathbf{h}(x_2, y_2; \xi, \eta) = \mathcal{S}\{\delta(x_1-\xi, y_1-\eta)\} \tag{2-20}$$

La fonction h est appelée *réponse impulsionnelle* du système. Les grandeurs d'entrée et de sortie du système peuvent alors être reliées par l'équation simple:

$$\mathbf{g}_2(x_2, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}_1(\xi, \eta)\, h(x_2, y_2; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \tag{2-21}$$

Cette expression fondamentale connue sous le nom d'*intégrale de superposition* exprime le fait très important qu'un système linéaire est complètement caractérisé par sa réponse aux impulsions unité. Pour déterminer complètement le signal de sortie on doit connaître en général les réponses à des impulsions situées en tous les points possibles du plan d'entrée. Dans le cas d'un système linéaire *formant des images* ce résultat a une interprétation physique intéressante: on peut décrire entièrement les effets des éléments optiques (lentilles, diaphragmes, etc...) en précisant les fonctions images (qui peuvent être à valeurs complexes) de points sources situés en tous points du champ objet.

Systèmes linéaires invariants: fonctions de transfert. — Après avoir examiné les relations entre les grandeurs d'entrée et de sortie pour un système linéaire quelconque, considérons une importante sous-classe de systèmes linéaires: les systèmes linéaires *invariants*. On dit qu'un circuit électrique est invariant dans le temps si sa réponse impulsionnelle $h(t, \tau)$ (c'est-à-dire sa réponse au temps t à une excitation impulsionnelle unité appliquée au temps τ) ne dépend que de l'intervalle de temps $(t-\tau)$. Des circuits électriques composés de résistances, condensateurs et inductances déterminés sont invariants puisque leurs caractéristiques ne changent pas au cours du temps.

De la même façon on dit qu'un système linéaire formant des images est *invariant dans l'espace* (ou *isoplanétique*) si sa réponse impulsionnelle $\mathbf{h}(x_2, y_2; \xi, \eta)$ ne dépend que des distances $(x_2-\xi)$ et $(y_2-\eta)$. Pour un tel système nous pouvons donc écrire:

$$\mathbf{h}(x_2, y_2; \xi, \eta) = \mathbf{h}(x_2-\xi, y_2-\eta) \tag{2-22}$$

Ainsi, un système optique est invariant dans l'espace si l'image d'un point source objet change seulement de place et non de forme quand le point source explore le champ objet. En pratique les systèmes formant des images sont rarement isoplanétiques pour l'ensemble du champ objet, mais il est généralement possible de diviser le champ

objet en petites régions (*éléments isoplanétiques*) à l'intérieur desquelles le système est sensiblement invariant. Pour décrire complètement le système, on doit alors connaître la réponse impulsionnelle caractéristique de chaque élément isoplanétique; mais si la portion particulière du champ objet que l'on considère est suffisamment petite, il suffit souvent de considérer seulement l'élément isoplanétique centré sur l'axe du système. Remarquons que, pour un système invariant l'intégrale de superposition (2-21) prend la forme particulièrement simple:

$$\mathbf{g}_2(x_2, y_2) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}_1(\xi, \eta)\, \mathbf{h}(x_2-\xi, y_2-\eta)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta \tag{2-23}$$

où nous reconnaissons la *convolution* bidimensionnelle de la fonction objet et de la réponse impulsionnelle du système. Désormais nous adopterons une notation abrégée plus commode de la convolution; la relation (2-23) s'écrit alors:

$$\mathbf{g}_2 = \mathbf{g}_1 * \mathbf{h}$$

le symbole $*$ placé entre deux fonctions quelconques indiquant que l'on doit effectuer la convolution de ces deux fonctions. A cette classe des systèmes linéaires invariants est associé un édifice mathématique beaucoup plus complet qu'à la classe plus générale de tous les systèmes linéaires et c'est justement pour cette raison que les systèmes invariants sont si faciles à étudier. La simplicité des systèmes invariants apparaît plus clairement lorsqu'on remarque que la relation de convolution (2-23) prend une forme particulièrement simple après transformation de Fourier. Plus précisément, on voit en transformant les deux membres de (2-23) et en utilisant le théorème de convolution, que les spectres $\mathbf{G}_2(f_X, f_Y)$ et $\mathbf{G}_1(f_X, f_Y)$ des fonctions de sortie et d'entreé du système sont reliés par l'équation simple:

$$\mathbf{G}_2(f_X, f_Y) = \mathbf{H}(f_X, f_Y)\cdot\mathbf{G}_1(f_X, f_Y) \tag{2-24}$$

où $\mathbf{H}$ est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle:

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{h}(\xi, \eta)\, \exp\left[-j2\pi(f_X\xi+f_Y\eta)\right] \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta \tag{2-25}$$

La fonction $\mathbf{H}$, appelée *fonction de transfert* du système, exprime les effets du système dans le «domaine des fréquences». Remarquons que l'opération de convolution (2-23), nécessaire pour déterminer la sortie du système, est relativement laborieuse; elle peut être remplacée grâce à (2-24) par la série d'opérations souvent plus simples: transformation de Fourier, multiplication des transformées et transformation inverse de Fourier.

Par, ailleurs nous pouvons considérer que les relations (2-24) et (2-25) indiquent, pour des systèmes linéaires invariants, que l'entrée peut être décomposée en fonctions élémentaires qui conviennent mieux que les fonctions δ de la relation (2-19). Ces nouvelles fonctions élémentaires sont, bien sûr, les fonctions exponentielles complexes. En transformant $\mathbf{g}_1$ nous ne faisons que décomposer l'entrée en fonctions exponentielles complexes des divers couples de fréquences spatiales (f_X, f_Y). La multiplication du spectre d'entrée $\mathbf{G}_1$ par la fonction de transfert $\mathbf{H}$ rend alors compte des effets du

système sur chaque fonction élémentaire. Notons que ces effects se limitent à un changement d'amplitude et à une variation de phase; ceci est évident puisque nous multiplions simplement le spectre de la fonction d'entrée par un nombre complexe $\mathbf{H}(f_X, f_Y)$ pour chaque valeur du couple (f_X, f_Y). La transformation inverse du spectre $\mathbf{G}_2$ de la fonction de sortie reconstruit le signal de sortie $\mathbf{g}_2$ en ajoutant toutes les fonctions élémentaires ainsi modifiées.

Pour terminer, insistons particulièrement sur le fait que les simplifications apportées par la théorie de la fonction de transfert ne sont applicables qu'aux systèmes linéaires *invariants*. Pour les applications de la théorie de Fourier à l'analyse des circuits électriques variables dans le temps, le lecteur pourra consulter la référence 2-4; il trouvera dans la référence 2-5 des applications de l'analyse de Fourier aux systèmes optiques non invariants.

2-3. — THÉORIE DE L'ÉCHANTILLONNAGE BIDIMENSIONNEL

Il est souvent commode, aussi bien pour le traitement des données que pour l'analyse mathématique, de représenter une fonction $\mathbf{g}(x, y)$ par un tableau des valeurs échantillonnées qu'elle prend sur un ensemble discret de points du plan xy. On conçoit intuitivement que si ces échantillons sont prélevés en des points suffisamment rapprochés les uns des autres, les données échantillonnées représentent fidèlement la fonction originale, en ce sens que l'on peut reconstruire $\mathbf{g}$ avec une très grande précision par simple interpolation. Le fait suivant est moins évident: pour une classe particulière de fonctions connues sous le nom de *fonctions à spectre limité*, la reconstruction peut être réalisée *exactement* à la seule condition que l'intervalle entre deux échantillons ne soit pas supérieur à une certaine limite. Ce résultat a été donné initialement par Whittaker (réf. 2-6) et a été diffusé plus tard par Shannon (réf. 2-7) dans ses études relatives à la théorie de l'information.

Le théorème d'échantillonage s'applique à la classe des fonctions à spectre limité; par là, nous entendons des fonctions dont les transformées de Fourier ne sont non nulles que sur une région finie $\mathcal{R}$ de l'espace des fréquences. Nous commencerons par donner une forme de ce théorème tout à fait analogue au théorème unidimensionnel utilisé par Shannon, puis nous indiquerons très brièvement les améliorations qui peuvent être apportées à ce théorème dans quelques cas de problèmes bidimensionnels.

Le théorème d'échantillonnage de Whittaker-Shannon. — Pour obtenir ce qui constitue peut-être l'expression la plus simple du théorème d'échantillonnage, considérons un ensemble d'échantillons de la fonction $\mathbf{g}$, prélevés suivant un réseau rectangulaire; cet ensemble est défini par:

$$\mathbf{g}_e(x, y) = \operatorname{pgn}\left(\frac{x}{X}\right) \cdot \operatorname{pgn}\left(\frac{y}{Y}\right) \mathbf{g}(x, y)$$

La fonction échantillonnée $\mathbf{g}_e$ consiste donc en un réseau de fonction δ séparées par des intervalles de largeur X suivant l'axe des x et de largeur Y suivant l'axe des y,

comme le montre la figure 2-4. Le volume limité par la représentation dans l'espace de la fonction δ et par le plan xy est proportionnel à la valeur de la fonction **g** en chaque point particulier du réseau rectangulaire d'échantillonnage.

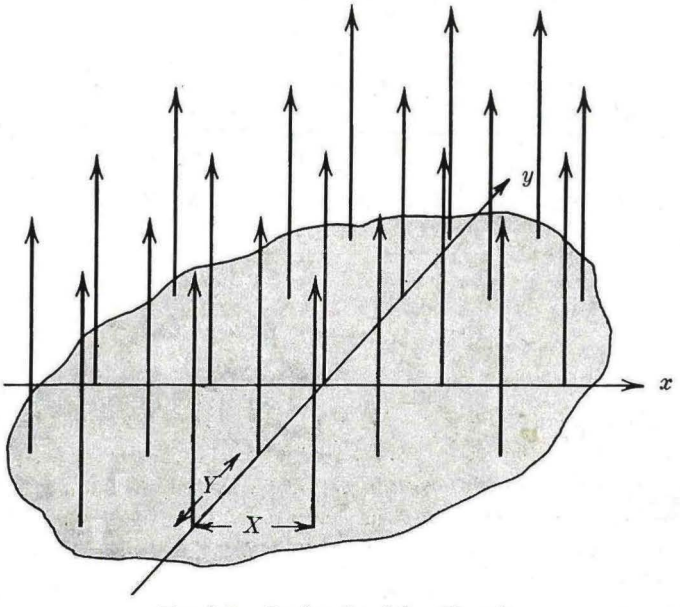


FIG. 2-4. – *La fonction échantillonnée.*

En appliquant le théorème de convolution, on peut trouver le spectre $\mathbf{G}_e$ de $\mathbf{g}_e$ par la convolution de la transformée de pgn $\left(\frac{x}{X}\right)\cdot$pgn $\left(\frac{y}{Y}\right)$ et de la transformée de **g** soit:

$$\mathbf{G}_e(f_X, f_Y) = \mathcal{F}\left\{\text{pgn}\left(\frac{x}{X}\right)\cdot\text{pgn}\left(\frac{y}{Y}\right)\right\} * \mathbf{G}(f_X, f_Y)$$

où ici encore, le symbole $*$ indique l'opération de convolution. En utilisant alors le Tableau 2-1 et le théorème de similitude nous avons:

$$\mathcal{F}\left\{\text{pgn}\left(\frac{x}{X}\right)\cdot\text{pgn}\left(\frac{y}{Y}\right)\right\} = XY\cdot\text{pgn}\,(Xf_x)\cdot\text{pgn}\,(Yf_y)$$

D'autre part, d'après les résultats du problème (2-1b):

$$XY\ \text{pgn}\,(Xf_X)\cdot\text{pgn}\,(Yf_Y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(f_X-\frac{n}{X}, f_Y-\frac{m}{Y}\right)$$

Il en résulte que le spectre de la fonction échantillonnée est donné par:

$$\mathbf{G}_e(f_X, f_Y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathbf{G}\left(f_X-\frac{n}{X}, f_Y-\frac{m}{Y}\right) \qquad (2\text{-}27)$$

Il apparaît donc que l'on peut obtenir le spectre de $\mathbf{g}_e$ de façon simple en construisant le spectre de **g** autour de chaque point de coordonnées $\left(\frac{n}{X}, \frac{m}{Y}\right)$ dans le plan $f_X f_Y$ comme le montre la figure 2-5.

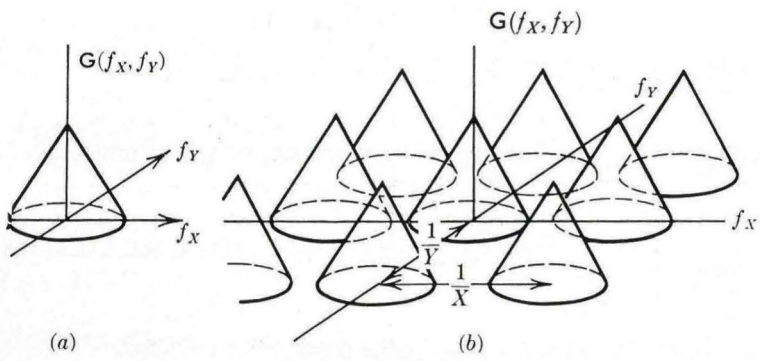


FIG. 2-5. – *(a) Spectre de la fonction originale, (b) Spectre de la fonction échantillonnée.*

Puisqu'on a supposé que la fonction **g** était à spectre limité, son spectre **G** n'est non nul que sur une région finie $\mathcal{R}$ de l'espace des fréquences. Comme l'implique la relation 2-27 on peut trouver la région sur laquelle le spectre de la fonction *échantillonnée* est non nul en construisant la région $\mathcal{R}$ autour de chaque point $\left(\frac{n}{X}, \frac{m}{Y}\right)$ dans le plan des fréquences. Il apparaît alors que si X et Y sont suffisamment petits (c'est-à-dire si les échantillons sont prélevés en des points suffisamment rapprochés les uns des autres) les intervalles $\frac{1}{X}$ et $\frac{1}{Y}$ entre les diverses régions spectrales seront assez grands pour que l'on soit sûr que des régions voisines ne se chevauchent pas (voir fig. 2-5). Il est donc possible de retrouver *exactement* le spectre d'origine **G** à partir de $\mathbf{G}_e$ en faisant passer la fonction échantillonnée $\mathbf{g}_e$ à travers un filtre linéaire qui transmet sans distorsion le terme $(n = 0, m = 0)$ de l'équation (2-27) et qui élimine complètement tous les autres termes. On obtient ainsi à la sortie de ce filtre une réplique exacte de la fonction originale $\mathbf{g}(x, y)$.

Si on désire retrouver la fonction originale il est donc nécessaire de prendre des échantillons en des points assez proches les uns des autres pour permettre la séparation des diverses régions spectrales de $\mathbf{G}_e$. Afin de déterminer la distance maximale entre deux échantillons pour laquelle cette séparation est réalisée, appelons $2B_X$ et $2B_Y$ les dimensions respectives, suivant les directions des axes f_X et f_Y, *du plus petit* rectangle[1] contenant tout le domaine $\mathcal{R}$. Comme les différents termes du spectre (2-27) de la fonction échantillonnée sont séparés par les distances $\frac{1}{X}$ et $\frac{1}{Y}$ dans les

[1] Pour simplifier nous supposons que ce rectangle est centré à l'origine. Si ce n'est pas le cas, on peut modifier aisément la démonstration et obtenir ainsi un théorème d'échantillonnage qui convienne mieux.

directions correspondantes f_X et f_Y, la séparation de ces régions spectrales est assurée si:

$$X \leqslant \frac{1}{2B_X} \quad \text{et} \quad Y \leqslant \frac{1}{2B_Y} \tag{2-28}$$

Les dimensions *maximales* de la maille du réseau d'échantillonnage qui permettent une restitution exacte de la fonction originale sont donc $\frac{1}{2B_X}$ et $\frac{1}{2B_Y}$.

Après avoir déterminé les distances maximales permises entre les échantillons, il reste à préciser la fonction de transfert exacte du filtre à travers lequel on doit faire passer les données échantillonnées. Dans bien des cas on dispose ici d'une grande liberté pour effectuer ce choix car, pour de nombreuses formes possibles de la région $\mathcal{R}$, un grand nombre fonctions de transfert laisseront passer le terme ($n = 0$, $m = 0$) de $\mathbf{G}_e$ et excluront tous les autres termes. Cependant, pour résoudre nos problèmes, il suffit de remarquer que si les relations (2-28) sont satisfaites il existe une fonction de transfert qui donnera toujours le résultat désiré quelle que soit la forme particulière de $\mathcal{R}$, c'est la fonction:

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y) = \text{rect}\left(\frac{f_X}{2B_X}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{f_Y}{2B_Y}\right) \tag{2-29}$$

On voit que $\mathbf{G}$ est exactement reconstituée à partir de $\mathbf{G}_e$ puisque:

$$\mathbf{G}_e(f_X, f_Y) \cdot \text{rect}\left(\frac{f_X}{2B_X}\right) \text{rect}\left(\frac{f_Y}{2B_Y}\right) \equiv \mathbf{G}(f_X, f_Y)$$

Cette identité se traduit dans le domaine spatial par:

$$\left[\text{pgn}\left(\frac{x}{X}\right) \cdot \text{pgn}\left(\frac{y}{Y}\right) \cdot \mathbf{g}(x, y)\right] * \mathbf{h}(x, y) = \mathbf{g}(x, y) \tag{2-30}$$

où $\mathbf{h}$ est la réponse impulsionnelle du filtre qui s'écrit:

$$\begin{aligned}\mathbf{h}(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int \text{rect}\left(\frac{f_X}{2B_X}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{f_Y}{2B_Y}\right) \exp\left[j\,2\pi(f_X x + f_Y y)\right] \mathrm{d}f_X \cdot \mathrm{d}f_Y \\ &= 4B_X B_Y \,\text{sinc}\,(2B_X \cdot x)\,\text{sinc}\,(2B_Y \cdot y)\end{aligned}$$

En remarquant que:

$$\text{pgn}\left(\frac{x}{X}\right) \cdot \text{pgn}\left(\frac{y}{Y}\right) \cdot \mathbf{g}(x, y) = XY \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}(nX, mY)\, \delta(x - nX, y - mY)$$

l'équation (2-30) devient:

$$\mathbf{g}(x, y) = 4 \cdot B_X \cdot B_Y \cdot X \cdot Y \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}(nX, mY) \times \text{sinc}\,[2B_X(x - nX)]\,\text{sinc}\,[2B_Y(y - mY)]$$

Enfin, lorsqu'on choisit pour intervalles d'échantillonnage X et Y les valeurs maximales permises $\frac{1}{2B_X}$ et $\frac{1}{2B_Y}$, l'identité devient:

$$\mathbf{g}(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}\left(\frac{n}{2B_X}, \frac{m}{2B_Y}\right) \times \operatorname{sinc}\left[2B_X\left(x-\frac{n}{2B_X}\right)\right] \operatorname{sinc}\left[2B_Y\left(y-\frac{m}{2B_Y}\right)\right] \quad (2\text{-}31)$$

L'équation (2-31) représente un résultat fondamental que nous appellerons désormais le *théorème d'échantillonnage de Whittaker-Shannon.* Il exprime que la reconstitution exacte d'une fonction à spectre limité peut être réalisée à partir des valeurs échantillonnées de cette fonction, prélevées suivant un réseau rectangulaire de maille convenable. La reconstitution est réalisée en injectant en chaque point d'échantillonnage, une fonction d'interpolation constituée par un produit de fonctions sinc.

Ce résultat ne constitue pas le seul théorème d'échantillonnage possible. On a fait deux choix plutôt arbitraires au cours de cette étude; si on avait pris en ces deux occasions des hypothèses différentes on aurait obtenu des théorèmes d'échantillonnage différents. Nous avons d'abord choisi arbitrairement une trame d'échantillonnage *rectangulaire.* Un peu plus loin nous avons choisi la fonction de transfert particulière donnée par (2-29). En faisant des choix différents on établit d'autres théorèmes tout aussi valables; en fait, dans certains cas, ces derniers théorèmes peuvent être plus «efficaces», en ce sens qu'il suffit de moins d'échantillons par unité de surface pour permettre une reconstitution complète. On renvoie le lecteur désireux d'approfondir la théorie de l'échantillonnage multidimensionnel aux travaux de Bracewell (réf. 2-8) et de Peterson et Middleton (réf. 2-9). D'autre part, Linden (réf. 2-10) a étudié des théorèmes d'échantillonnage faisant intervenir à la fois les valeurs des dérivées de la fonction et celles de la fonction elle-même.

PROBLÈMES

2-1. Démontrer les propriétés suivantes des fonctions δ:

a) $\delta(ax, by) = \frac{1}{|ab|}\,\delta(x, y)$

b) $\operatorname{pgn}(ax)\operatorname{pgn}(by) = \frac{1}{|ab|}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\delta\left(x-\frac{n}{a}, y-\frac{m}{b}\right)$

2-2. Etablir les expressions des transformées de Fourier suivantes:

a) $\mathcal{F}\{\operatorname{rect}(x)\operatorname{rect}(y)\} = \operatorname{sinc}(f_X)\cdot\operatorname{sinc}(f_Y)$

b) $\mathcal{F}\{\operatorname{tri}(x)\cdot\operatorname{tri}(y)\} = \operatorname{sinc}^2(f_X)\operatorname{sinc}^2(f_Y)$

Etablir les expressions des transformées de Fourier généralisées suivantes:

c) $\mathcal{F}\{1\} = \delta(f_X, f_Y)$

d) $\mathcal{F}\{\operatorname{sgn}(x)\cdot\operatorname{sgn}(y)\} = \left(\frac{1}{j\pi f_X}\right)\left(\frac{1}{j\pi f_Y}\right)$

2-3. Démontrer les théorèmes suivants relatifs à la transformation de Fourier:

a) $\mathcal{F}\cdot\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x, y)\} = \mathcal{F}^{-1}\cdot\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{g}(x, y)\} = \mathbf{g}(-x, -y)$ en tout point où $\mathbf{g}$ est continue.

b) $\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x, y)\cdot\mathbf{h}(x, y)\} = \mathcal{F}\{\mathbf{g}(x, y)\} * \mathcal{F}\{\mathbf{h}(x, y)\}$

c) $\mathcal{F}\{\nabla^2\mathbf{g}(x, y)\} = -4\pi^2[f_X^2+f_Y^2]\cdot\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x, y)\}$ où ∇^2 est l'opérateur laplacien à deux dimensions

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

2-4. Démontrer les expressions suivantes relatives aux transformées de Fourier-Bessel:

a) si $g_R(r) = \delta(r-r_0)$ alors $\mathcal{B}\{g_R(r)\} = 2\pi r_0 J_0(2\pi r_0\varrho)$

b) si $g_R(r) = 1$ pour $a \leqslant r \leqslant 1$ et s'annule ailleurs, alors

$$\mathcal{B}\{g_R(r)\} = \frac{J_1(2\pi\varrho)-aJ_1(2\pi a\varrho)}{\varrho}$$

c) si $\mathcal{B}\{\mathbf{g}_R(r)\} = \mathbf{G}(\varrho)$ alors

$$\mathcal{B}\{\mathbf{g}_R(ar)\} = \frac{1}{a^2}\,\mathbf{G}\left(\frac{\varrho}{a}\right)$$

d) $\mathcal{B}\{\exp(-\pi r^2)\} = \exp(-\pi\varrho^2)$

2-5. L'expression $\mathbf{p}(x, y) = \mathbf{g}(x, y) * \left[\operatorname{pgn}\left(\frac{x}{X}\right)\operatorname{pgn}\left(\frac{y}{Y}\right)\right]$ définit une fonction périodique de période X suivant la direction x et de période Y suivant la direction y.

a) Montrer que la transformée de Fourier de $\mathbf{p}$ peut s'écrire:

$$\mathbf{P}(f_X, f_Y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\mathbf{G}\left(\frac{n}{X}, \frac{m}{Y}\right)\delta\left(f_X-\frac{n}{X}, f_Y-\frac{m}{Y}\right)$$

où $\mathbf{G}$ est la transformée de $\mathbf{g}$.

b) Faire un schéma de la fonction $\mathbf{p}(x, y)$ quand

$$\mathbf{g}(x, y) = \operatorname{rect}\left(\frac{2x}{X}\right)\operatorname{rect}\left(\frac{2y}{Y}\right)$$

et trouver la transformée correspondante $\mathbf{P}(f_X, f_Y)$

2-6. On définit les opérateurs de transformation: $\mathcal{F}_A\{\ \}$ et $\mathcal{F}_B\{\ \}$ par:

$$\mathcal{F}_A\{\mathbf{g}\} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{g}(\xi, \eta)\exp\left[-j\frac{2\pi}{a}(f_X\xi+f_Y\eta)\right]\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta.$$

$$\mathcal{F}_B\{\mathbf{g}\} = \frac{1}{b}\int_{-\infty}^{\infty}\int\mathbf{g}(\xi, \eta)\exp\left[-j\frac{2\pi}{b}(x\xi+y\eta)\right]\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta.$$

a) Trouver une expression simple pour $\mathcal{F}_B\{\mathcal{F}_A\{\mathbf{g}(x, y)\}\}$

b) Interpréter les résultats pour $a > b$ et $a < b$.

2-7. Soit $\mathbf{g}(r, \theta)$ une fonction séparable en coordonnées polaires.

a) Montrer que si $\mathbf{g}(r, \theta) = \mathbf{g}_R(r)e^{jm\theta}$ alors

$$\mathcal{F}\{\mathbf{g}(r, \theta)\} = (-j)^m e^{jm\phi}\mathcal{H}_m\{\mathbf{g}_R(r)\}$$

où $\mathcal{H}_m\{\ \}$ est la transformée de Hankel d'ordre m

$$\mathcal{H}_m\{\mathbf{g}_R(r)\} = 2\pi\int_0^{\infty} r\mathbf{g}_R(r)\,J_m(2\pi r\varrho)\,\mathrm{d}r$$

et où (ϱ, ϕ) sont les coordonnées polaires dans l'espace des fréquences.

Indication: $$\exp(ja\sin x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(a)\exp(jkx)$$

b) Montrer que dans le cas plus général d'une dépendance angulaire arbitraire $\mathbf{g}_\theta(\theta)$ la transformée de Fourier peut s'exprimer par les séries infinies suivantes de transformées de Hankel:

$$\mathcal{F}\{\mathbf{g}(r,\theta)\} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(-j)^k e^{jk\phi}\mathcal{H}_k\{\mathbf{g}_R(r)\}$$

où

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{g}_\theta(\theta)e^{-jk\theta}\,\mathrm{d}\theta$$

2-8. On applique le signal d'entrée $g(x, y) = \cos[2\pi(f_X x + f_Y y)]$ à un système linéaire. A quelle condition (suffisante) le signal de sortie est-il une fonction réelle sinusoïdale de même fréquence que le signal d'entrée? Exprimer l'amplitude et la phase de ce signal de sortie en fonction d'une caractéristique appropriée du système.

2-9. Montrer qu'une fonction n'ayant aucune composante non nulle en dehors d'un cercle de rayon B dans le plan des fréquences obéit au théorème d'échantillonnage suivant:

$$\mathbf{g}(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{g}\left(\frac{n}{2B}, \frac{m}{2B}\right)\left\{\frac{\pi}{2}\frac{J_1\left[2\pi B\sqrt{\left(x-\frac{n}{2B}\right)^2+\left(y-\frac{m}{2B}\right)^2}\right]}{2\pi B\sqrt{\left(x-\frac{n}{2B}\right)^2+\left(y-\frac{m}{2B}\right)^2}}\right\}$$

2-10. L'opérateur «transformation de Fourier» peut être considéré comme une application de fonctions sur leurs transformées et par conséquent satisfait à la définition d'un système telle qu'elle a été donnée dans ce chapitre.

a) Le système est-il linéaire?

b) Peut-on définir une *fonction de transfert* qui caractérise ce système? Si oui, quelle est-elle? Si non, pourquoi?

2-11. L'«aire équivalente» Δ_{XY} d'une fonction $\mathbf{g}(x, y)$ peut être définie par:

$$\Delta_{XY} = \left|\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{\mathbf{g}(0,0)}\right|$$

alors que «la largeur de bande équivalente» de $\mathbf{g}$ est définie en fonction de sa transformée $\mathbf{G}$ par:

$$\Delta_{f_X f_Y} = \left|\frac{\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{G}(f_X,f_Y)\,\mathrm{d}f_X\,\mathrm{d}f_Y}{\mathbf{G}(0,0)}\right|$$

Montrer que:

$$\Delta_{XY}\Delta_{f_X f_Y} = 1$$

2-12. Une certaine fonction à valeurs complexes de deux variables indépendantes (x, y) admet une transformée de Fourier bidimensionnelle qui est identiquement nulle à l'extérieur de la région définie par $|f_X| \leqslant B_X$ et $|f_Y| \leqslant B_Y$ dans le domaine des fréquences. Montrer que la partie de cette fonction s'étendant sur la région définie par $|x| \leqslant X$ et $|y| \leqslant Y$ dans le domaine spatial peut être approximativement représentée par $32\,B_X B_Y XY$ nombres réels. Pourquoi est-ce seulement une approximation et quand cette approximation est-elle satisfaisante? (Le nombre $16B_X B_Y XY$ est communément appelé *produit espace — largeur de bande* de la partie considérée de la fonction).

2-13. Le signal d'entrée d'un certain système formant des images est une distribution *objet* d'un champ complexe $\mathbf{U}_0(x, y)$ possédant toutes les fréquences spatiales, tandis que le signal de sortie du système est une distribution *image* $\mathbf{U}_i(x, y)$. On suppose

que ce système se comporte comme un filtre linéaire passe-bas spatialement invariant, ayant une fonction de transfert identiquement nulle à l'extérieur de la région définie par $|f_X| \leqslant B_X$, $|f_Y| \leqslant B_Y$ dans le domaine des fréquences. Montrer qu'il existe un objet «équivalent» $\mathbf{U}_0'(x, y)$ constitué par une réseau rectangulaire de points sources qui produit exactement la même image $\mathbf{U}_i$ que l'objet véritable $\mathbf{U}_0$, et que la distribution du champ de l'objet équivalent peut s'écrire:

$$\mathbf{U}_0'(x, y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}_0(\xi, \eta) \operatorname{sinc}(n - 2B_X\xi) \operatorname{sinc}(m - 2B_Y\eta) \, d\xi \, d\eta \right] \times \delta\left(x - \frac{n}{2B_X}, \; y - \frac{m}{2B_Y}\right)$$

RÉFÉRENCES

2-1 Papoulis, A.: *The Fourier Integral and Its Applications*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1962.

2-2 Bracewell, R. N.: *The Fourier Transform and Its Applications*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1965.

2-3 Lighthill, M. J.: *Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions*, Cambridge University Press, New York, 1960.

2-4 Kailath, T. in E. J. Baghdady (ed.): Channel Characterization: Time-variant Dispersive Channels, *Lectures on Communication System Theory*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.

2-5 Lohmann, A. W., and D. P. Paris: Space-Variant Image Formation, *J. Opt. Soc. Am.*, **55**:1007 (1965).

2-6 Whittaker, E. T.: On the Functions Which Are Represented by the Expansions of the Interpolation Theory, *Proc. Roy. Soc. Edinburg, Sect. A*, **35**:181 (1915).

2-7 Shannon, C. E.: Communication in the Presence of Noise, *Proc. IRE*, **37**:10 (1949).

2-8 Bracewell, R. N.: Two-Dimensional Aerial Smoothing in Radio Astronomy, *Australia J. Phys.*, **9**:297 (1956).

2-9 Peterson, D. P., and D. Middleton: Sampling and Reconstruction of Wave-Number-Limited Functions in N-Dimensional Euclidean Spaces, *Information and Control*, **5**:279 (1962).

2-10 Linden, D. A.: Discussion of Sampling Theorems, *Proc. IRE*, **47**:1219 (1959).

CHAPITRE 3

LES FONDEMENTS DE LA THÉORIE SCALAIRE DE LA DIFFRACTION

Le phénomène connu sous le nom de *diffraction* joue un rôle de la plus haute importance dans toutes les branches de la physique où la propagation des ondes intervient. Dans ce chapitre nous considérons quelques-uns des fondements de la théorie scalaire de la diffraction. Bien que la théorie présentée ici soit suffisamment générale pour pouvoir être appliquée à d'autres domaines, tels que ceux de la propagation des ondes acoustiques et de la propagation des ondes radioélectriques, les applications qui nous concernent principalement se situent dans le domaine de l'optique physique. Pour comprendre pleinement les propriétés des systèmes formant des images optiques et celles des systèmes de traitement optique de l'information il est essentiel de tenir compte de la diffraction et des limitations qu'elle impose. On rencontrera dans la suite de l'exposé un certain nombre de références à des présentations plus complètes de la théorie de la diffraction.

3-1. — INTRODUCTION HISTORIQUE

Le terme *diffraction* a été convenablement défini par Sommerfeld (réf. 3-1) comme étant «toute déviation des rayons lumineux de leur trajet rectiligne qui ne peut s'expliquer ni par une réflexion ni par une réfraction». Le premier exposé concernant un tel phénomène et sa description précise est dû à Grimaldi, et fut publié en 1665, peu après sa mort. Ses mesures étaient effectuées à l'aide d'un dispositif expérimental analogue à celui de la figure 3-1. Il éclairait un écran opaque percé d'une ouverture par une source de lumière et il observait l'intensité lumineuse dans un plan placé à quelque distance derrière l'écran. D'après la théorie corpusculaire de la propagation de la lumière qui constituait l'explication admise à l'époque des phénomènes optiques, l'ombre portée de l'écran devait être bien définie, avec des bords nets. Les observations de Grimaldi indiquaient cependant que la transition entre la lumière et l'ombre était progressive et non brutale. Si la qualité de la source lumineuse qu'il utilisait avait été meilleure, il aurait pu observer des résultats bien plus étonnants encore, tels que la présence de franges brillantes et sombres s'étendant assez loin dans l'ombre géométrique de l'écran. De tels effets ne peuvent pas s'expliquer de manière satisfaisante par une théorie corpusculaire de la lumière qui suppose la propagation rectiligne des rayons lumineux en l'absence de réflexion et de réfraction.

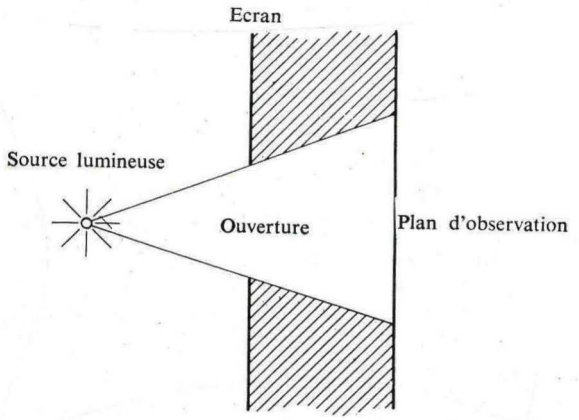


FIG. 3-1. – *Dispositif pour observer la diffraction de la lumière.*

Christian Huygens, en proposant le premier en 1678, la théorie ondulatoire de la lumière franchit la première étape dans l'élaboration d'une théorie permettant d'expliquer de tels effets. Il exprima sa conception intuitive du phénomène de propagation de la façon suivante: si chaque point de la surface d'onde d'une perturbation lumineuse était considéré comme la source d'une nouvelle perturbation sphérique «secondaire», on pourrait alors déterminer la surface d'onde à tout instant ultérieur en construisant l'«enveloppe» des ondelettes secondaires comme le montre la figure 3-2.

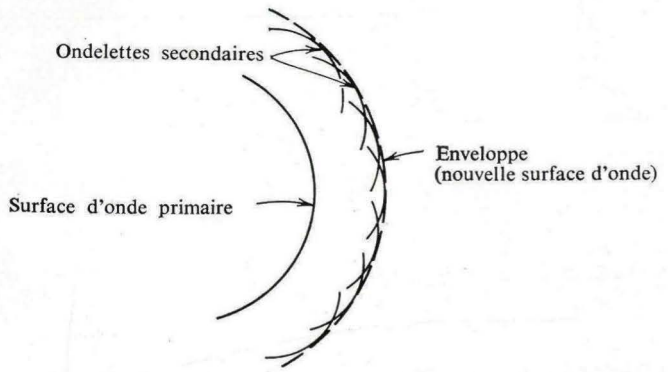


FIG. 3-2. – *Construction de l'enveloppe de Huygens.*

Les idées intuitives de Huygens furent rendues extrêmement fécondes en 1818 par le célèbre mémoire d'Augustin Fresnel qui ajouta à la construction de l'enveloppe de Huygens le principe d'interférences de Young. En faisant quelques hypothèses supplémentaires, assez arbitraires, sur les amplitudes et les phases des sources secondaires de Huygens, et en admettant que les différentes ondelettes pouvaient interférer entre elles, Fresnel fut en mesure de calculer la répartition de lumière dans les figures de diffraction avec une excellente précision.

En 1882, Gustav Kirchhoff donna aux idées de Huygens et de Fresnel des bases mathématiques plus solides; il y réussit en montrant que les amplitudes et les phases

attribuées par Fresnel aux sources secondaires étaient en fait des conséquences logiques de la nature ondulatoire de la lumière. Kirchhoff fit reposer sa formulation mathématique sur deux hypothèses concernant les valeurs aux limites prises par la variable lumineuse à la surface d'un obstacle placé sur la trajet de la lumière. Plus tard, Poincaré en 1892 et Sommerfeld en 1894 ont prouvé que ces hypothèses étaient incompatibles entre elles[1]. A la suite de ces critiques, la formulation par Kirchhoff de ce que l'on appelle *le principe de Huygens-Fresnel* doit être considérée comme une première approximation, quoique dans la plupart des cas, les résultats qu'elle permet d'obtenir concordent bien avec l'expérience. Kottler (réf. 3-2) tenta d'éliminer ces contradictions en interprétant le problème des *valeurs aux limites* de Kirchhoff comme un problème de «*saltus*», le mot latin saltus indiquant une discontinuité, c'est-à-dire un saut d'une fonction. La théorie de Kirchhoff fut aussi modifiée par Sommerfeld qui élimina l'une des hypothèses déjà mentionnées, celle qui concerne le comportement de la lumière à la limite de l'obstacle, par l'utilisation de la théorie des fonctions de Green. Cette théorie, appelée «théorie de la *diffraction de Rayleigh-Sommerfeld*», sera traitée au paragraphe 3-4.

Soulignons dès à présent que les théories de Kirchhoff et de Rayleigh-Sommerfeld contiennent certaines simplifications et approximations essentielles. La plus importante consiste à traiter la lumière comme une grandeur *scalaire*; ceci revient à étudier seulement l'amplitude de l'une des composantes du champ électrique ou du champ magnétique et suppose que chacune des autres composantes puisse être étudiée indépendemment de la même façon. Une telle approximation néglige totalement le couplage existant entre les différentes composantes du champ électrique et du champ magnétique du fait des équations de Maxwell, couplage qui empêche de les traiter séparément. Fort heureusement, certaines expériences réalisées dans le domaine des hyperfréquences (réf. 3-3) ont montré que la théorie scalaire donne des résultats tout à fait en accord avec l'expérience si deux conditions sont réalisées: (1) l'ouverture diffractante doit être grande devant la longueur d'onde, (2) les champs diffractés ne doivent pas être observés trop près de l'ouverture. Ces conditions seront largement satisfaites dans les problèmes que nous traiterons ici. Pour une discussion plus complète des limites d'application de cette théorie scalaire en optique instrumentale, le lecteur pourra consulter la réference 3-4 (§ 8-4). Néanmoins, il existe des problèmes importants pour lesquels les conditions requises ne sont pas satisfaites, par exemple dans la théorie des réseaux de diffraction à haute résolution (réf. 3-5). Nous ne considérerons pas ici de tels problèmes car pour obtenir des résultats suffisamment précis, il faudrait tenir compte de la nature vectorielle des champs. Il existe effectivement des généralisations vectorielles de la théorie de la diffraction dont la première présentation satisfaisante est due à Kottler (réf. 3-6).

Sommerfeld donna en 1896 la première solution vraiment rigoureuse d'un problème de diffraction (réf. 3-7); il traita le cas bidimensionnel d'une onde plane tombant sur un demi plan infiniment mince parfaitement conducteur. Kottler (réf. 3-8) compara plus tard la solution de Sommerfeld aux résultats correspondants obtenus par la méthode scalaire de Kirchhoff.

---

[1] Pour une discussion plus détaillée relative à ces incompatibilités se reporter au paragraphe 3-4.

Il est inutile de dire qu'une introduction historique concernant un sujet tenant une place aussi large dans la littérature peut difficilement être considérée comme complète. On renvoie donc le lecteur à des traités détaillés de la théorie de la diffraction comme par exemple ceux ayant pour références 3-9, 3-10, 3-11.

3-2. — PRÉLIMINAIRES MATHÉMATIQUES

Avant d'entreprendre l'étude même de la diffraction, nous commencerons pas considérer un certain nombre de préliminaires mathématiques qui constituent les fondements des théories les plus récentes de la diffraction. Ces discussions préalables serviront aussi à introduire les notations qui seront utilisées par la suite.

L'équation de Helmholtz. — Représentons une perturbation lumineuse au point P et à l'instant t par la fonction scalaire $u(P, t)$; dans le cas d'ondes polarisées rectilignement nous pouvons considérer que cette fonction représente soit l'élongation du champ électrique, soit celle du champ magnétique. Nous nous limitons pour le moment au cas des ondes purement monochromatiques; la généralisation aux ondes polychromatiques est reportée au paragraphe 3-5.

Pour une onde monochromatique on peut écrire explicitement le champ sous la forme:

$$u(P, t) = U(P) \cos [2\pi\nu t + \phi(P)] \tag{3-1}$$

où $U(P)$ et $\phi(P)$ sont respectivement l'amplitude et la phase de l'onde en P, alors que ν est sa fréquence temporelle. On obtient une forme plus condensée de (3-1) en utilisant la notation complexe qui permet d'écrire:

$$u(P, t) = \mathrm{Re}\,[\mathbf{U}(P) \exp(-j\,2\pi\nu t)] \tag{3-2}$$

où $\mathbf{U}(P)$ est la fonction complexe suivante de l'espace (souvent appelée *amplitude complexe*):

$$\mathbf{U}(P) = U(P) \exp[-j\phi(P)] \tag{3-3}$$

et où Re est la notation abrégée de *partie réelle*.

Si la perturbation réelle $u(P, t)$ représente une onde optique, elle doit satisfaire, en tout point de l'espace où il n'y a pas de source, à l'équation d'onde scalaire:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{3-4}$$

∇^2 étant l'opérateur laplacien

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Comme la façon dont u dépend du temps est connue *a priori*, la fonction complexe $\mathbf{U}(P)$ suffit à décrire complètement la perturbation. Si on substitue (3-2) dans (3-4), on voit que la perturbation complexe $\mathbf{U}$ doit obéir à l'équation indépendante du temps:

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{U} = 0 \tag{3-5}$$

où k, appelé *nombre d'ondes*, est défini par:

$$k = 2\pi \frac{\nu}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}$$

La relation (3-5) est connue sous le nom *d'équation de Helmholtz*; à l'avenir nous supposerons que l'amplitude complexe de toute perturbation optique monochromatique qui se propage dans un espace libre doit obéir à une telle relation.

Le théorème de Green. — On peut effectuer le calcul de la perturbation complexe $\mathbf{U}$ en un point d'observation de l'espace à l'aide de la relation mathématique connue sous le nom de *théorème de Green.*

Ce théorème que l'on trouvera dans la plupart des cours de mathématiques supérieures (voir par exemple la réference 3-12, p. 316) peut s'énoncer ainsi:

Théorème de Green. — Soient $\mathbf{U}(P)$ et $\mathbf{G}(P)$ deux fonctions complexes quelconques de l'espace et soit S une surface fermée limitant un volume V. Si $\mathbf{U}$, $\mathbf{G}$ et leurs dérivées partielles premières et secondes sont définies et continues à l'intérieur de S et sur S, nous avons alors:

$$\iiint_V (\mathbf{G}\nabla^2\mathbf{U} - \mathbf{U}\nabla^2\mathbf{G})\, dv = \iint_S \left(\mathbf{G}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} - \mathbf{U}\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial n}\right) ds \qquad (3\text{-}6)$$

où $\dfrac{\partial}{\partial n}$ représente une dérivation partielle dans la direction de la normale *extérieure* en chaque point de S.

Ce théorème est, à beaucoup d'égards, le fondement essentiel de la théorie scalaire de la diffraction. Cependant son application directe au problème de la diffraction ne peut se faire qu'après un choix très prudent de la fonction $\mathbf{G}$, dite *fonction de Green*, et de la surface fermée S. Nous allons maintenant aborder le premier de ces problèmes en adoptant la fonction de Green choisie par Kirchhoff et en démontrant le théorème intégral qui en découle.

Le théorème intégral de Helmholtz et Kirchhoff. — La formulation selon Kirchhoff du problème de la diffraction est basée sur un certain théorème intégral qui exprime la solution U de l'équation d'onde homogène, en un point quelconque, à l'aide des valeurs prises par U et sa dérivée première sur une surface fermée arbitraire entourant ce point. Ce théorème avait déjà été établi en acoustique par H. Von Helmholtz.

Notons P_0 le point considéré et S une surface arbitraire fermée entourant P_0 comme l'indique la figure 3-3. Le problème consiste donc à exprimer la perturbation optique en P_0 à l'aide des valeurs qu'elle prend sur la surface S. Pour cela, appliquons, à la suite de Kirchhoff, le théorème de Green en choisissant comme fonction de Green $\mathbf{G}$ celle qui représente une onde sphérique d'amplitude unité se propageant à partir du point P_0 (c'est ce que l'on appelle la fonction de Green *de l'espace libre*). Ainsi la valeur de $\mathbf{G}$ en un point arbitraire P_1 est donnée par:

$$\mathbf{G}(P_1) = \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \qquad (3\text{-}7)$$

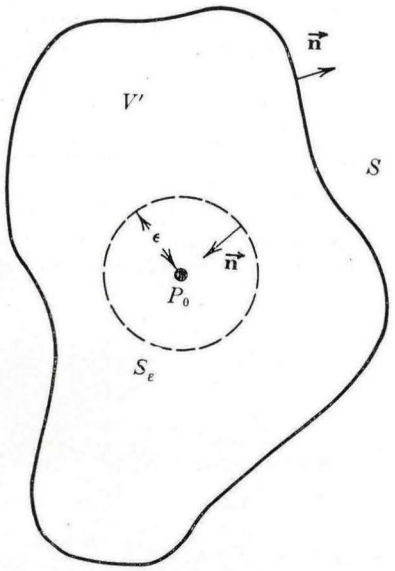


FIG. 3-3. – *La surface d'intégration.*

Dans cette formule la notation r_{01} exprime le module du vecteur $\vec{\mathbf{r}}_{01}$ d'origine P_0 et d'extrémité P_1.

La fonction $\mathbf{G}$, ainsi que ses dérivées première et seconde, doit être continue à l'intérieur du volume V pour que le théorème de Green puisse s'appliquer. Par conséquent, pour exclure la discontinuité en P_0, on est amené à construite autour de ce point une petite surface sphérique S_ε de rayon ε. On applique alors le théorème de Green au volume d'intégration V' compris entre S et S_ε, la surface d'intégration étant la surface composite

$$S' = S + S_\varepsilon$$

comme l'indique la figure 3-3. Remarquons que la normale «extérieure» à la surface composite est orientée, comme on le voit sur la figure 3-3, vers l'extérieur au sens habituel pour les points de S, mais est orientée vers P_0 pour les points de S_ε.

A l'intérieur du volume V', la perturbation $\mathbf{G}$ étant simplement une onde sphérique qui se propage à partir de P_0, elle satisfait à l'équation de Helmholtz:

$$(\nabla^2 + k^2)\mathbf{G} = 0 \tag{3-8}$$

Si nous substituons les deux équations de Helmholtz (3-5) et (3-8) dans le premier membre de la relation (3-6), nous trouvons:

$$\iiint_{V'} (\mathbf{G}\nabla^2\mathbf{U} - \mathbf{U}\nabla^2\mathbf{G})\, dv = -\iiint_{V'} (\mathbf{G}\mathbf{U}k^2 - \mathbf{U}\mathbf{G}k^2)\, dv \equiv 0$$

Ainsi le théorème se réduit à:

$$\iint_{S'} \left(\mathbf{G}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} - \mathbf{U}\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial n}\right) ds = 0$$

soit:

$$-\iint_{S_\varepsilon} \left(\mathbf{G}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} - \mathbf{U}\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial n}\right) ds = \iint_{S} \left(\mathbf{G}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} - \mathbf{U}\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial n}\right) ds \tag{3-9}$$

Remarquons maintenant que pour un point P_1 situé sur S' nous avons:

$$\mathbf{G}(P_1) = \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \tag{3-10}$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{G}(P_1)}{\partial n} = \cos(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{r}}_{01})\left(jk - \frac{1}{r_{01}}\right)\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \tag{3-11}$$

où cos $(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{r}}_{01})$ représente le cosinus de l'angle formé par la normale extérieure $\vec{\mathbf{n}}$ et le vecteur $\vec{\mathbf{r}}_{01}$ joignant P_0 à P_1. Dans le cas particulier où P_1 est sur S_ε: cos $(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{r}}_{01}) = -1$ et ces équations deviennent:

$$\mathbf{G}(P_1) = \frac{e^{jk\varepsilon}}{\varepsilon} \quad \text{et} \quad \frac{\partial \mathbf{G}(P_1)}{\partial n} = \frac{e^{jk\varepsilon}}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon} - jk\right) \tag{3-12}$$

En choisissant ε aussi petit que l'on veut, la propriété de continuité de $\mathbf{U}$ (et de ses dérivées) en P_0 nous permet d'écrire:

$$\iint_{S_\varepsilon} \left(\mathbf{G}\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} - \mathbf{U}\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial n}\right) \mathrm{d}s = 4\pi\varepsilon^2\left[\frac{\partial \mathbf{U}(P_0)}{\partial n}\frac{e^{jk\varepsilon}}{\varepsilon} - \mathbf{U}(P_0)\frac{e^{jk\varepsilon}}{\varepsilon}\left(\frac{1}{\varepsilon} - jk\right)\right]$$

L'intégrale tend vers $-4\pi\mathbf{U}(P_0)$ lorsque ε tend vers O.

La substitution de ce résultat dans (3-9) donne:

$$\mathbf{U}(P_0) = \frac{1}{4\pi}\iint_S \left\{\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n}\left[\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}\right] - \mathbf{U}\frac{\partial}{\partial n}\left[\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}\right]\right\} \mathrm{d}s \tag{3-13}$$

Ce résultat est connu sous le nom de *théorème intégral de Helmholtz et Kirchhoff*. Il joue un rôle important dans le développement de la théorie scalaire de la diffraction, car il permet d'exprimer le champ en un point quelconque P_0 en fonction des valeurs aux limites de l'onde sur une surface fermée quelconque entourant ce point. Comme nous allons le voir, une telle relation permet de développer les équations scalaires de la diffraction.

3-3. – FORMULATION SELON KIRCHHOFF DE LA DIFFRACTION PAR UN ÉCRAN PLAN

Considérons maintenant le problème de la diffraction par une ouverture percée dans un écran opaque infini. Comme le montre la figure 3-4, supposons qu'une onde tombe sur cet écran et proposons-nous de calculer le champ en un point P_0 situé derrière l'écran.

Application du théorème intégral. – Pour exprimer le champ au point P_0 appliquons le théorème intégral de Helmholtz et Kirchhoff et pour cela choisissons avec soin une surface d'intégration qui permette de mener à bien le calcul. A la suite de Kirchhoff, choisissons une surface S comportant deux parties ainsi que le montre la figure 3-4. La première partie est une surface plane S_1 située juste derrière l'écran diffractant; elle est reliée à la seconde, qui est une grande calotte sphérique de rayon R centrée au point d'observation P_0, de telle façon que la surface totale S, réunion de S_1 et S_2, soit fermée.

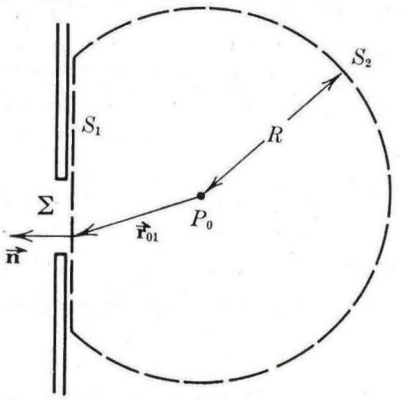


FIG. 3-4. – *Formulation selon Kirchhoff de la diffraction par un écran plan.*

En appliquant (3-13) il vient alors:

$$\mathbf{U}(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1+S_2} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} \mathbf{G} - \mathbf{U} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial n} \right) \mathrm{d}s$$

avec, comme auparavant, $\mathbf{G} = \dfrac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}$

Lorsque R croît, S_2 diffère peu d'une grande demi-sphère. On est alors tenté de dire que, comme $\mathbf{U}$ et $\mathbf{G}$ décroissent tous deux comme $\dfrac{1}{R}$, à la limite la fonction sous le signe somme s'annule et l'intégration sur toute la surface S_2 donne une contribution nulle. Cependant l'aire d'intégration augmente comme R^2, de sorte que ce raisonnement est incorrect. On est aussi tenté de supposer que, du fait de la valeur finie c de la vitesse propagation des perturbations, R sera à la limite assez grand pour que les ondes n'aient pas encore atteint S_2: la fonction sous le signe somme sera alors nulle sur la surface. Mais ce raisonnement est en contradiction avec notre hypothèse concernant des perturbations monochromatiques qui doivent, par définition, avoir toujours existé dans le temps. Il est donc nécessaire d'examiner le problème avec plus de soin avant de se prononcer sur la contribution de S_2 à l'intégrale précédente.

Sur S_2, $\mathbf{G}$ s'écrit:

$$\mathbf{G} = \frac{\exp(jkR)}{R}$$

et de (3-11) on tire:

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial n} = \left(jk - \frac{1}{R} \right) \frac{\exp jkR}{R} \cong jk\mathbf{G}$$

cette dernière approximation étant valable pour R suffisamment grand. L'intégrale sur S_2 se réduit ainsi à:

$$\iint_{S_2} \left[\mathbf{G} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} - \mathbf{U}(jk\mathbf{G}) \right] \mathrm{d}s = \int_{\Omega} \mathbf{G} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} - jk\mathbf{U} \right) R^2 \, \mathrm{d}\omega$$

où Ω est l'angle solide sous lequel du point P_0 on voit S_2. Comme la quantité $|R\mathbf{G}|$ est uniformément limitée sur S_2, l'intégrale étendue à toute la surface S_2 s'annule lorsque R devient infini, si la perturbation $\mathbf{U}$ possède la propriété:

$$\lim_{R \to \infty} R \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} - jk\mathbf{U} \right) = 0 \qquad (3\text{-}14)$$

dans toutes les directions. Cette condition est connue sous le nom de *condition de rayonnement de Sommerfeld* (réf. 3-13); elle est réalisée si la perturbation $\mathbf{U}$ s'annule

au moins aussi vite qu'une onde sphérique divergente (voir Pb. 3-1). Comme la perturbation qui éclaire l'ouverture sera dans tous les cas une onde sphérique ou une combinaison linéaire d'ondes sphériques, nous pouvons être sûrs que cette condition sera satisfaite dans la pratique et que, par conséquent, la contribution de l'intégrale sur S_2 sera rigoureusement nulle.

Les conditions aux limites de Kirchhoff. — Une fois résolue l'intégration sur la surface S_2 il est maintenant possible d'exprimer la perturbation en P_0 en fonction de la perturbation et de ses dérivées normales dans le plan infini S_1 situé immédiatement derrière l'écran, soit:

$$\mathbf{U}(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} \mathbf{G} - \mathbf{U} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial n} \right) \mathrm{d}s \tag{3-15}$$

Comme l'écran est opaque, excepté sur l'ouverture que l'on notera Σ, il semble satisfaisant a priori de penser que la contribution majeure à l'intégrale (3-15) provient des points de S_1 situés à l'intérieur de l'ouverture Σ; c'est en ces points, en effet, que nous pouvons nous attendre à trouver les valeurs les plus grandes de la fonction sous le signe somme. A la suite de ce raisonnement intuitif, Kirchhoff adopta les hypothèses suivantes (réf. 3-14):

1. En tout point de la surface Σ le champ $\mathbf{U}$ et sa dérivée $\dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial n}$ sont exactement les mêmes qu'en l'absence d'écran.

2. Sur la portion de S_1 qui s'étend dans l'ombre géométrique de l'écran, le champ $\mathbf{U}$ et sa dérivée $\dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial n}$ sont identiquement nuls.

Ces conditions sont habituellement connus sous le nom de *conditions aux limites de Kirchhoff*. La première nous permet d'exprimer la perturbation dans le plan de l'ouverture comme s'il n'y avait pas d'écran et la seconde de négliger toute la surface d'intégration à l'exception de la partie Σ de S_1. Ainsi (3-15) se réduit à:

$$\mathbf{U}(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} \mathbf{G} - \mathbf{U} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial n} \right) \mathrm{d}s \tag{3-16}$$

Bien que les deux conditions aux limites de Kirchhoff simplifient considérablement les résultats, il est important de souligner que ni l'une ni l'autre ne traduisent vraiment la réalité. La présence de l'écran perturbe forcément, dans une certaine mesure, les champs répartis sur Σ: en effet sur le pourtour de l'ouverture, certaines conditions aux limites doivent être satisfaites, ce qui ne serait pas le cas en l'absence d'écran. De plus, l'ombre portée par l'écran n'est jamais parfaite car les champs s'étendent toujours derrière l'écran sur une distance de plusieurs longueurs d'ondes. Cependant, si les dimensions de l'ouverture sont grandes devant la longueur d'onde, ces effets de bord peuvent être négligés[1] et les deux conditions aux limites permettent d'obtenir des résultats qui concordent très bien avec l'expérience.

[1] Comme nous le verrons, des objections à l'utilisation des conditions aux limites de Kirchhoff apparaissent non en raison des effets de bord mais en raison de certaines contradictions internes.

La formule de diffraction de Fresnel-Kirchhoff et le principe de Huygens-Fresnel. — On obtient une simplification supplémentaire de l'expression de $\mathbf{U}(P_0)$ en remarquant que la distance r_{01} de l'ouverture au point d'observation est généralement bien plus grande que la longueur d'onde; par conséquent, puisque $k \gg \frac{1}{r_{01}}$, l'expression (3-11) devient:

$$\frac{\partial \mathbf{G}(P_1)}{\partial n} = \cos(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{r}}_{01}) \left(jk - \frac{1}{r_{01}}\right) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}$$

$$\simeq jk \cos(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{r}}_{01}) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}$$

Si nous tenons compte de cette approximation et de l'expression (3-7) de $\mathbf{G}$, la relation (3-16) s'écrit:

$$\mathbf{U}(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \left[\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} - jk\mathbf{U} \cos(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{r}}_{01})\right] ds \qquad (3\text{-}17)$$

Supposons maintenant que l'ouverture soit éclairée par l'onde sphérique d'expression:

$$\mathbf{U}(P_1) = \frac{A \exp(jkr_{21})}{r_{21}}$$

provenant d'un point source située en P_2 à la distance r_{21} du point P_1 (voir fig. 3-5).

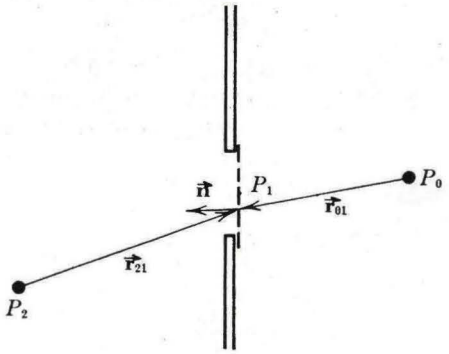


FIG. 3-5. – *Ecran plan éclairé par un point source.*

Si la longueur r_{21} est grande devant la longueur d'onde, (3-17) peut alors se réduire aisément (voir Pb. 3-2) à:

$$\mathbf{U}(P_O) = \frac{A}{j\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp[jk(r_{21}+r_{01})]}{r_{21}r_{01}} \times \left[\frac{\cos(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{r}}_{01}) - \cos(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{r}}_{21})}{2}\right] ds \qquad (3\text{-}18)$$

Ce résultat, qui s'applique seulement dans le cas de l'éclairage produit par un point source unique, est habituellement appelé *formule de diffraction de Fresnel-Kirchhoff.*

Remarquons que cette formule (3-18) fait jouer un rôle symétrique au point source et au point d'observation. Ainsi, l'effet produit au point P_2 par un point source situé en P_0 est le même que l'effet produit en P_0 par un point source de même intensité situé en P_2. Ce résultat est quelquefois appelé *théorème de réciprocité de Helmholtz.*

Pour terminer, nous allons donner une interprétation intéressante et très utile de la formule de diffraction (3-18). Réécrivons cette relation de la manière suivante:

$$\mathbf{U}(P_0) = \iint_{\Sigma} \mathbf{U}'(P_1) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} ds \qquad (3\text{-}19)$$

où

$$\mathbf{U}'(P_1) = \frac{1}{j\lambda}\left[\frac{A\exp(jkr_{21})}{r_{21}}\right]\left[\frac{\cos(\vec{\mathbf{n}},\vec{\mathbf{r}}_{01})-\cos(\vec{\mathbf{n}},\vec{\mathbf{r}}_{21})}{2}\right] \tag{3-20}$$

On peut alors interpréter (3-19) en disant que le champ produit en P_0 provient d'une infinité de sources ponctuelles «secondaires», fictives, situées sur l'ouverture même. L'amplitude $\mathbf{U}'(P_1)$ de la source secondaire située en P_1 est évidemment proportionnelle à l'amplitude en P_1 de l'onde *incidente* soit $\dfrac{A\exp(jkr_{21})}{r_{21}}$ mais elle diffère de cette amplitude sur trois points. D'abord, l'amplitude se distingue de l'amplitude incidente par un facteur λ^{-1}. Ensuite cette amplitude est réduite par le *facteur d'obliquité*, $\frac{1}{2}[\cos(\vec{\mathbf{n}},\vec{\mathbf{r}}_{01})-\cos(\vec{\mathbf{n}},\vec{\mathbf{r}}_{21})]$ qui est toujours compris entre zéro et l'unité; en effet on doit associer à chaque source secondaire un «facteur directif» anisotrope. Enfin, la phase de la source secondaire située en P_1 diffère de celle de l'onde incidente de 90°.

Ces curieuses propriétés des sources secondaires ont une importance historique, puisque, dans ses premiers travaux, Fresnel trouva que la combinaison de la construction de l'enveloppe de Huygens et du principe d'interférences de Young permettait de prévoir exactement les figures de diffraction, à condition qu'on puisse attribuer aux sources secondaires de telles propriétés. Pour obtenir des résultats exacts, Fresnel *admit* la réalité de ces propriétés. Kirchhoff démontra par un développement mathématique que ces propriétés étaient en fait des conséquences directes de la nature ondulatoire de la lumière.

Remarquons que la «démonstration» précédente du principe dit de Huygens-Fresnel a été limitée au cas où l'ouverture est éclairée par une seule onde sphérique divergente. Cependant, nous reviendrons bientôt sur le principe de Huygens-Fresnel pour montrer qu'il est en fait plus général que cette première étude ne le laisse supposer.

3-4. — FORMULATION SELON RAYLEIGH ET SOMMERFELD DE LA DIFFRACTION PAR UN ÉCRAN PLAN

La théorie de Kirchhoff donne des résultats qui concordent de façon remarquable avec l'expérience, aussi l'utilise-t-on largement dans la pratique. Cependant, il existe dans cette théorie certaines contradictions internes qui ont motivé la recherche de développements mathématiques plus satisfaisants. Les difficultés de la théorie de Kirchhoff proviennent du fait que l'on doit imposer des conditions aux limites *à la fois* au champ et à sa dérivée normale. En particulier, d'après un théorème bien connu de la théorie du potentiel, si une fonction potentiel à deux dimensions et sa dérivée normale s'annulent ensemble le long d'un segment curviligne fini, cette fonction *doit s'annuler dans tout le plan*. De la même manière, si une solution de l'équation d'onde à trois dimensions s'annule sur un élément de surface fini, elle doit s'annuler dans tout l'espace. Ainsi, l'ensemble des deux conditions aux limites de la théorie de Kirchhoff implique que le champ soit identiquement nul en tout point situé derriére de l'ouverture; ce résultat contredit évidemment l'expérience. Ces contradictions se

manifestent aussi dans le fait suivant: on peut montrer que la formule de diffraction de Fresnel-Kirchhoff ne permet pas de retrouver, lorsque le point d'observation se rapproche de l'écran ou de l'ouverture, les conditions aux limites prises comme hypothèses. Compte tenu de ces contradictions, il est vraiment remarquable que la théorie de Kirchhoff donne des résultats aussi précis.

Les contradictions de la théorie de Kirchhoff furent levées par Sommerfeld; ce dernier montra qu'il n'est pas nécessaire d'imposer des valeurs aux limites à la fois à la perturbation et à sa dérivée normale. Cette théorie, dite de Rayleigh-Sommerfeld, fait l'objet du présent paragraphe. Pour une comparaison des théories de Kirchhoff et de Rayleigh-Sommerfed on se reportera à la référence 3-15[1].

Choix de nouvelles fonctions de Green. — Reprenons la relation (3-15) donnant l'amplitude du champ observé en fonction du champ incident et de sa dérivée normale sur tout l'écran:

$$\mathbf{U}(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial n} \mathbf{G} - \mathbf{U} \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial n} \right) \mathrm{d}s \tag{3-15}$$

Les considérations ayant permis d'obtenir la relation précédente demeurant valables, modifions la fonction de Green $\mathbf{G}$ de la théorie de Kirchhoff de la façon suivante: supposons que, soit $\mathbf{G}$, soit $\dfrac{\partial \mathbf{G}}{\partial n}$, s'annule sur la totalité de la surface S_1. Dans l'un ou l'autre de ces deux cas on n'est plus tenu d'imposer simultanément des conditions aux limites à $\mathbf{U}$ et à $\dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial n}$ et on élimine ainsi les contradictions de la théorie de Kirchhoff.

Sommerfeld remarqua que les fonctions de Green possédant de telles propriétés existent réellement. Supposons que $\mathbf{G}$ soit engendrée non seulement par le point source P_0 mais aussi par un second point source P_0' symétrique de P_0 par rapport à l'écran (voir fig. 3-6).

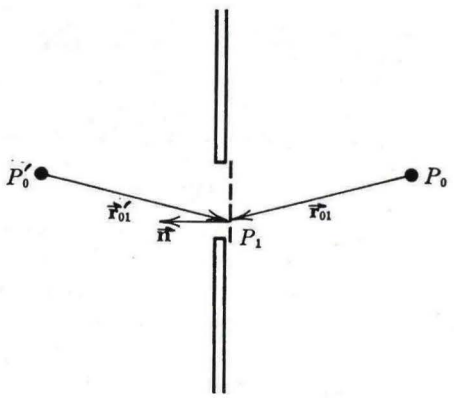


FIG. 3.6. — *Formulation selon Rayleigh et Sommerfeld de la diffraction par un écran plan.*

Admettons que le point source en P_0' émette une perturbation de même longueur d'onde λ que le point source P_0 et que les deux sources oscillent avec une différence de phase de 180°. La fonction de Green est donnée dans ce cas par:

$$\mathbf{G}_-(P_1) = \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} - \frac{\exp(jkr_{01}')}{r_{01}'} \tag{3-21}$$

[1] Le fait qu'une théorie est logique en soi alors qu'une autre ne l'est pas, ne signifie pas nécessairement que la première soit *plus satisfaisante* que la seconde. L'exactitude relative des formulations de Kirchhoff et de Rayleigh-Sommerfeld est encore un sujet de recherche active.

où r'_{01} est la distance de P'_0 à P_1. La dérivée normale correspondante de $\mathbf{G}_-$ est:

$$\frac{\partial \mathbf{G}_-}{\partial n} = \cos(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{r}}_{01})\left(jk - \frac{1}{r_{01}}\right)\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} - \cos(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{r}}'_{01})\left(jk - \frac{1}{r'_{01}}\right)\frac{\exp(jkr'_{01})}{r'_{01}} \tag{3-22}$$

Comme P_1 est sur la surface S_1, nous avons:

$$r_{01} = r'_{01}$$

et

$$\cos(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{r}}_{01}) = -\cos(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{r}}'_{01})$$

Par conséquent, sur cette surface:

$$\mathbf{G}_-(P_1) = 0$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{G}_-(P_1)}{\partial n} = 2\cos(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{r}}_{01})\left(jk - \frac{1}{r_{01}}\right)\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \tag{3-23}$$

La fonction $\mathbf{G}$ s'annule donc en tout point de la surface S_1.

On peut obtenir une autre fonction de Green (tout aussi commode) en supposant que les deux points sources oscillent en phase, ce qui donne:

$$\mathbf{G}_+(P_1) = \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} + \frac{\exp(jkr'_{01})}{r'_{01}} \tag{3-24}$$

On montre aisément (voir Pb. 3-3) que la *dérivée normale* de cette fonction s'annule en tout point de l'écran et de l'ouverture.

La formule de diffraction de Rayleigh Sommerfeld — Remplaçons dans la relation 3-15 la fonction $\mathbf{G}$ par la fonction de Green $\mathbf{G}_-$. Compte tenu de (3-23), on voit aisément que:

$$\mathbf{U}(P_0) = \frac{1}{j\lambda}\iint_{S_1} \mathbf{U}(P_1)\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}\cos(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{r}}_{01})\,ds \tag{3-25}$$

en supposant $r_{01} \gg \lambda$. On peut maintenant appliquer à $\mathbf{U}$ *seule* les conditions aux limites de Kirchhoff, ce qui donne le résultat général:

$$\mathbf{U}(P_0) = \frac{1}{j\lambda}\iint_{\Sigma} \mathbf{U}(P_1)\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}\cos(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{r}}_{01})\,ds \tag{3-26}$$

Comme il n'a pas été nécessaire d'appliquer les conditions aux limites pour $\dfrac{\partial \mathbf{U}}{\partial n}$ les contradictions de la théorie de Kirchhoff ont évidemment disparu. Afin de comparer ces résultats à ceux de la théorie de Kirchhoff, supposons l'ouverture éclairée par une onde sphérique divergeant à partir d'un point source situé en P_2 (se reporter de nouveau à la figure 3-5). Soit donc:

$$\mathbf{U}(P_1) = A\frac{\exp(jkr_{21})}{r_{21}}$$

L'expression (3-26) s'écrit alors

$$\mathbf{U}(P_0) = \frac{A}{j\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp\,[jk(r_{21}+r_{01})]}{r_{01}r_{21}} \cos\,(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{r}}_{01})\,\mathrm{d}s \tag{3-27}$$

Cette dernière expression est connue sous le nom de *formule de diffraction de Rayleigh-Sommerfeld*; on peut la comparer au résultat correspondant (3-18) de la théorie de Kirchhoff. Notons que la seule différence entre les deux expressions réside dans le facteur d'obliquité.

Le choix de la fonction de Green $\mathbf{G}_+$ donne des résultats analogues; son étude est proposée sous forme de problème. L'expression de $\mathbf{U}(P_0)$ découlant de cette nouvelle fonction de Green est, bien sûr, tout aussi valable que l'expression précédente.

Discussion plus approfondie du principe de Huygens-Fresnel. — Notre précédente démonstration du «principe» de Huygens-Fresnel supposait que l'ouverture diffractante était éclairée par une onde sphérique divergente unique. D'après l'expression (3-26) on voit aisément que le principe est en fait valable pour des modes d'éclairage plus généraux de l'ouverture. A vrai dire, le cas particulier de l'onde sphérique unique implique cette généralité, car un éclairage quelconque peut toujours être décomposé en un ensemble fini ou infini de points sources; on peut alors invoquer la linéarité de l'équation d'onde et appliquer le principe de Huygens-Fresnel à chacun des points sources.

Pour la suite il est important de se rendre compte que le principe de Huygens-Fresnel exprimé par l'équation (3-26) n'est rien d'autre en réalité qu'une *intégrale de superposition* du type discuté au chapitre 2. Pour préciser ce point de vue, nous pouvons réécrire (3-26) sous la forme:

$$\mathbf{U}(P_0) = \iint_{\Sigma} \mathbf{h}(P_0, P_1)\,\mathbf{U}(P_1)\,\mathrm{d}s \tag{3-28}$$

où la fonction de pondération $\mathbf{h}(P_0, P_1)$ est définie par:

$$\mathbf{h}(P_0, P_1) = \frac{1}{j\lambda} \frac{\exp\,(jkr_{01})}{r_{01}} \cos\,(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{r}}_{01}) \tag{3-29}$$

Le fait que notre analyse de la diffraction conduise à une intégrale de superposition ne doit pas nous surprendre. Nous avons vu que la première condition indispensable pour obtenir un tel résultat est que la propriété de *linéarité* soit remplie, et c'est justement ce que nous avons supposé tout au début de notre étude.

3-5. — GÉNÉRALISATION DE LA THÉORIE DE RAYLEIGH-SOMMERFELD AUX ONDES NON MONOCHROMATIQUES

Nous avons supposé jusqu'à présent que les perturbations ondulatoires étaient, dans tous les cas, parfaitement monochromatiques. De telles ondes peuvent être réalisées avec une bonne approximation et sont particulièrement faciles à analyser.

Nous allons maintenant étudier brièvement le cas plus général d'une perturbation non monochromatique; nous nous limiterons aux résultats donnés par la méthode de Rayleigh-Sommerfeld mais il serait possible d'obtenir des résultats analogues à partir de la théorie de Kirchhoff.

Considérons la perturbation scalaire $u(P_0, t)$ observée à l'arrière de l'ouverture Σ percée dans un écran opaque, lorsqu'une perturbation $u(P_1, t)$ tombe sur l'ouverture. Nous pouvons exprimer les fonctions du temps $u(P_0, t)$ et $u(P_1, t)$ à l'aide de leurs transformées inverses de Fourier:

$$u(P_1, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{U}(P_1, \nu) \exp(j 2\pi\nu t)\, \mathrm{d}\nu \tag{3-30a}$$

et

$$u(P_0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{U}(P_0, \nu) \exp(j 2\pi\nu t)\, \mathrm{d}\nu \tag{3-30b}$$

où $\mathbf{U}(P_0, \nu)$ et $\mathbf{U}(P_1, \nu)$ sont les spectres de Fourier respectifs de $u(P_0, t)$ et $u(P_1, t)$ et où ν représente la fréquence temporelle.

Transformons les expressions (3-30*a* et *b*) par le changement de variable $\nu' = -\nu$; cela donne:

$$u(P_1, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{U}(P_1, -\nu') \exp(-j 2\pi\nu' t)\, \mathrm{d}\nu' \tag{3-31a}$$

et

$$u(P_0, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{U}(P_0, -\nu') \exp(-j 2\pi\nu' t)\, \mathrm{d}\nu' \tag{3-31b}$$

Nous pouvons considérer ces fonctions non monochromatiques du temps $u(P_1, t)$ et $u(P_0, t)$ comme une combinaison linéaire de fonctions monochromatiques dont le type est représenté par l'expression (3-2). Ces fonctions élémentaires monochromatiques ont pour fréquence ν' et pour amplitudes complexes $\mathbf{U}(P_1, -\nu')$ et $\mathbf{U}(P_0, -\nu')$. Pour calculer l'amplitude complexe de chacune des perturbations monochromatiques en P_0 nous utiliserons les résultats du paragraphe (3-4), puis comme le phénomène de propagation des ondes est linéaire, nous superposerons tous ces résultats pour obtenir la fonction générale du temps $u(P_0, t)$.

Pour effectuer ce calcul, on peut utiliser directement la relation (3-26) en l'écrivant sous la forme:

$$\mathbf{U}(P_0, -\nu') = -j\frac{\nu'}{c} \iint_{\Sigma} \mathbf{U}(P_1, -\nu') \frac{\exp\left(j 2\pi\nu' \dfrac{r_{01}}{c}\right)}{r_{01}} \cos(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{r}}_{01})\, \mathrm{d}s \tag{3-32}$$

où on a utilisé la relation $\lambda'\nu' = c$. Si on substitue (3-32) dans (3-31*b*) et si on inverse l'ordre d'intégration, on obtient:

$$u(P_0, t) = \iint_{\Sigma} \frac{\cos(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{r}}_{01})}{2\pi c r_{01}} \left\{ \int_{-\infty}^{+\infty} -j 2\pi\nu' \mathbf{U}(P_1, -\nu') \exp\left[-j 2\pi\nu' \left(t - \frac{r_{01}}{c}\right)\right] \mathrm{d}\nu' \right\} \mathrm{d}s$$

Finalement, en utilisant l'identité:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u(P_1, t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}(P_1, -\nu')\exp(-j2\pi\nu' t)\,\mathrm{d}\nu'$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} -j2\pi\nu'\mathbf{U}(P_1, -\nu')\exp(-j2\pi\nu' t)\,\mathrm{d}\nu'$$

l'expression de $u(P_0, t)$ se met sous la forme:

$$u(P_0, t) = \iint_{\Sigma} \frac{\cos(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{r}}_{01})}{2\pi c r_{01}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} u\left(P_1, t - \frac{r_{01}}{c}\right) \mathrm{d}s \tag{3-33}$$

On voit donc que la perturbation ondulatoire au point P_0 est proportionnelle à la dérivée par rapport au temps de la perturbation au point P_1 situé sur l'ouverture. Comme la perturbation met le temps $\frac{r_{01}}{c}$ pour se propager de P_1 à P_0, l'onde observée dépend de la valeur prise par la dérivée de la fonction $u(P_1, t)$ à l'instant «retardé» $\left(t - \frac{r_{01}}{c}\right)$.

Cette démonstration plus générale montre que l'étude de la diffraction des ondes parfaitement monochromatiques n'est en aucune façon un sujet purement théorique, puisque les résultats concernant des perturbations fonctions plus générales du temps s'oqtiennent facilement à partir des résultats relatifs aux ondes monochromatiques. En outre, on dispose de sources optiques qui peuvent être considérées comme parfaitement monochromatiques dans la plupart des cas (par exemple le laser à gaz Hélium-Néon). Pour une étude plus approfondie des ondes non-monochromatiques on se reportera au problème 3-5.

3-6. — DIFFRACTION PAR LES BORDS

Dans l'exposé du principe de Huygens-Fresnel nous avons trouvé commode de considérer chaque point de l'ouverture comme une source d'ondes sphériques. Nous avons fait remarquer que de telles sources ne sont que des artifices mathématiques commodes qui n'ont pas de signification physique réelle. Thomas Young en 1802 a, en premier, donné qualitativement une interprétation physique de ces sources; il a considéré que le champ observé est formé par la superposition de l'onde incidente transmise sans perturbation par l'ouverture, et d'une onde diffractée ayant son origine au bord de l'ouverture. C'est l'existence d'une onde nouvelle ayant son origine dans le milieu matériel constitué par *le bord* de l'ouverture, qui donne précisément un sens physique à cette interprétation.

Sommerfeld, en proposant une solution rigoureuse du problème de la diffraction

par un écran demi-plan réfléchissant et parfaitement conducteur (réf. 3-7) reprit et renforça le raisonnement qualitatif de Young. Par cette étude rigoureuse il montra que le champ, dans l'ombre géométrique de l'écran, a la forme d'une onde cylindrique ayant son origine sur le bord de l'écran, alors que dans la région éclairée il est la superposition de cette onde cylindrique et de l'onde incidente directement transmise.

Maggi (réf. 3-16) et Rubinowicz (réf. 3-17) cherchèrent à appliquer la méthode de la diffraction par les bords à des problèmes de diffraction plus généraux; ils montrèrent que la formule de diffraction de Kirchhoff peut en fait être mise sous une forme en accord avec les idées de Young. Plus récemment Miyamoto et Wolf (réf. 3-18) ont développé cette théorie de la diffraction par les bords. Pour une discussion plus approfondie de ces questions, le lecteur consultera les références citées.

Une autre approche, très voisine du point de vue de Young, est la théorie géométrique de la diffraction développée par Keller (réf. 3-19). On obtient ici le champ à l'arrière d'un obstacle diffractant grâce aux principes de l'optique géométrique modifiés par l'introduction de «rayons diffractés» issus de certains points de l'obstacle même. On suppose que ces nouveaux rayons sont produits par les bords, les coins, les aspérités et la surface de l'obstacle. On peut souvent appliquer cette théorie au calcul des champs diffractés par des obstacles qui sont trop complexes pour pouvoir être traités par d'autres méthodes; de ce fait elle jouit d'une faveur de plus en plus grande.

3-7. — LE SPECTRE ANGULAIRE D'ONDES PLANES

On peut aussi formuler la théorie scalaire de la diffraction sous une forme qui ressemble beaucoup à la théorie des filtres linéaires temporellement invariants. Bien qu'en optique physique cette méthode soit moins largement utilisée que la théorie de Kirchhoff, l'attrait intuitif qu'elle exerce sur les lecteurs familiarisés avec la théorie des systèmes linéaires justifie néanmoins son introduction ici. Comme nous le verrons, si on effectue la transformation de Fourier de la distribution du champ complexe dans un plan quelconque, on peut identifier les diverses composantes spatiales de Fourier à des ondes planes qui se propagent dans des directions différentes. On peut alors calculer l'amplitude du champ en un point quelconque en faisant la somme des contributions de ces ondes planes, compte tenu des changements de phase qu'elles ont subi du fait de leur propagation. Pour une présentation détaillée de cette façon d'aborder la théorie de la diffraction, ainsi que pour son application à la propagation des ondes radioélectriques, on renvoie le lecteur à l'étude de Ratcliffe (réf. 3-10).

Le spectre angulaire et son interprétation physique. — Supposons qu'une onde, produite par un certain système de sources monochromatiques que l'on ne précise pas, se propage dans la direction des z positifs et tombe sur le plan xy de la figure 3-7. Représentons le champ complexe dans ce plan par $\mathbf{U}(x, y, 0)$; nous nous proposons de calculer le champ résultant $\mathbf{U}(x, y, z)$ qui apparaît en un second point P_0 de coordonnés (x, y, z).

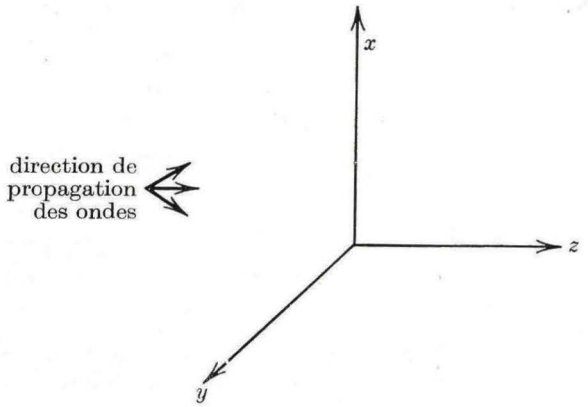


FIG. 3-7. – *Système de coordonnées pour le calcul du spectre angulaire.*

Dans le plan xy la fonction $\mathbf{U}$ possède une transformée de Fourier bidimensionnelle donnée par:

$$\mathbf{A}_0(f_X, f_Y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int \mathbf{U}(x, y, 0) \exp\left[-j\,2\pi(f_X x + f_Y y)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{3-34}$$

Ainsi que nous l'avons remarqué au chapitre 2, la transformation de Fourier peut être considérée comme une décomposition d'une fonction compliquée en un ensemble de fonctions exponentielles complexes plus simples. Pour exprimer ce point de vue, considèrons $\mathbf{U}$ comme la transformée inverse de son spectre:

$$\mathbf{U}(x, y, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int \mathbf{A}_0(f_X, f_Y) \exp\left[j\,2\pi(f_X x + f_Y y)\right] \mathrm{d}f_X\,\mathrm{d}f_Y \tag{3-35}$$

Rappelons maintenant que l'équation d'une onde plane, d'amplitude unité, qui se propage dans une direction de cosinus directeurs (α, β, γ) s'écrit:

$$\mathbf{B}(x, y, z) = \exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda}(\alpha x + \beta y + \gamma z)\right]$$

où
$$\gamma = \sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}$$

La fonction exponentielle complexe $\exp\left[j\,2\pi(f_X x + f_Y y)\right]$ peut donc être considérée comme l'expression, dans le plan $z = 0$, d'une onde plane qui se propage dans la direction de cosinus directeurs:

$$\alpha = \lambda f_X, \quad \beta = \lambda f_Y, \quad \gamma = \sqrt{1-(\lambda f_X)^2-(\lambda f_Y)^2} \tag{3-36}$$

L'amplitude complexe de cette onde plane élémentaire est $\mathbf{A}_0(f_X, f_Y)\mathrm{d}f_X\,\mathrm{d}f_Y$ au point $\left(f_X = \frac{\alpha}{\lambda},\ f_Y = \frac{\beta}{\lambda}\right)$. Pour cette raison, la fonction:

$$\mathbf{A}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int \mathbf{U}(x, y, 0) \exp\left[-j\,2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right)\right] \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{3-37}$$

est appelée *spectre angulaire* de la perturbation $\mathbf{U}(x, y, 0)$.

Propagation du spectre angulaire. — Considérons à présent le spectre angulaire de la perturbation **U** dans un plan parallèle au plan xy mais situé à la distance z de ce plan. Soit $\mathbf{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right)$ la fonction représentant le spectre angulaire de $\mathbf{U}(x, y, z)$ c'est-à-dire:

$$\mathbf{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{U}(x, y, z) \exp\left[-j2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right)\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \qquad (3\text{-}38)$$

Si on peut trouver la relation entre $\mathbf{A}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$ et $\mathbf{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right)$ on aura alors mis en évidence les effets de la propagation des ondes sur le spectre angulaire de la perturbation.

Pour trouver la relation cherchée, remarquons que **U** peut s'écrire sous la forme:

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right) \exp\left[j2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x + \frac{\beta}{\lambda}y\right)\right] \mathrm{d}\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \mathrm{d}\left(\frac{\beta}{\lambda}\right) \qquad (3\text{-}39)$$

En outre **U** doit satisfaire à l'équation de Helmholtz:

$$\nabla^2\mathbf{U} + k^2\mathbf{U} = 0$$

en tout point où il n'y a pas de source. Si, dans cette équation, on remplace **U** par l'expression (3-39), on voit que **A** doit satisfaire à l'équation différentielle:

$$\frac{d^2}{dz^2}\mathbf{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right) + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 [1-\alpha^2-\beta^2]\,\mathbf{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right) = 0$$

Une solution élémentaire de cette équation s'écrit sous la forme:

$$\mathbf{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right) = \mathbf{A}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) \exp\left(j\frac{2\pi}{\lambda}\, z\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\right) \qquad (3\text{-}40)$$

Ce résultat montre que lorsque les cosinus directeurs satisfont à $\alpha^2+\beta^2 < 1$, l'effet de la propagation sur une distance z se traduit simplement par un changement des phases relatives des diverses composantes du spectre angulaire. Comme chaque onde plane composante se propage suivant une direction différente chacune d'elle parcourt une distance différente pour atteindre un point d'observation donné; ainsi s'introduisent des retards de phase relatifs.

Cependant, lorsque les cosinus directeurs sont tels que:

$$\alpha^2+\beta^2 > 1$$

il est nécessaire de donner une interprétation différente. Dans ce cas, la racine carrée qui apparaît dans l'équation (3-40) est imaginaire et cette équation peut s'écrire:

$$\mathbf{A}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}; z\right) = \mathbf{A}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) \exp(-\mu z) \qquad (3\text{-}41)$$

où

$$\mu = \frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{\alpha^2+\beta^2-1}$$

Comme μ est un nombre réel positif, ces ondes élémentaires sont atténuées par le phénomène de propagation. De telles composantes du spectre angulaire sont appelées *ondes évanescentes*; elles ressemblent beaucoup aux ondes produites dans un guide d'ondes hyperfréquences qui est excité au-dessous de sa fréquence de coupure. Notons que le cas limite:

$$\alpha^2+\beta^2 = 1$$

correspond à des ondes planes qui se propagent dans des directions normales à l'axe des z et qui, par conséquent, ne véhiculent aucune puissance dans la direction des z[1].

Pour terminer, remarquons que la perturbation observée au point de coordonnées (x, y, z) peut s'écrire en fonction du spectre angulaire initial, en prenant la transformée inverse de l'expression 3-40; on obtient ainsi:

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int \mathbf{A}_0\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) \exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda}\sqrt{1-\alpha^2-\beta^2}\cdot z\right] \times \exp\left[j2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda}x+\frac{\beta}{\lambda}y\right)\right] \mathrm{d}\left(\frac{\alpha}{\lambda}\right) \mathrm{d}\left(\frac{\beta}{\lambda}\right) \quad (3\text{-}42)$$

Effets d'une ouverture diffractante sur le spectre angulaire d'une perturbation. Supposons qu'un écran opaque infini comportant une ouverture Σ soit placé dans le plan $z = 0$ de la figure 3-7. Nous allons considérer les effets de l'écran diffractant sur le spectre angulaire de la perturbation. Soit $\mathbf{A}_i\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$ le spectre angulaire de la perturbation tombant sur l'écran et $t(x, y)$ la *transmittance* de l'ouverture définie par:

$$t(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{pour tout point } (x, y) \text{ de } \Sigma \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Appliquons les conditions aux limites de Kirchhoff à la perturbation $\mathbf{U}$ en supposant que l'écran ne perturbe pas les ondes tombant sur Σ et que les champs dans l'ombre géométrique de l'écran sont identiquement nuls. Le champ dans un plan situé immédiatement derrière l'écran peut donc s'écrire:

$$\mathbf{U}_t(x, y, 0) = \mathbf{U}_i(y, x, 0)\, t(x, y)$$

où $\mathbf{U}_i(x, y, 0)$ représente le champ incident. On peut alors utiliser le théorème de convolution de l'analyse de Fourier pour écrire le spectre $\mathbf{A}_t\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$ des ondes transmises sous la forme:

$$\mathbf{A}_t\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = \mathbf{A}_i\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) * \mathbf{T}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) \quad (3\text{-}43)$$

---

[1] Remarquons que la théorie scalaire ne prévoit des ondes évanescentes que dans les conditions mêmes où elle risque de ne plus être légitime. Il convient donc de les étudier dans une théorie vectorielle.

où, par définition:

$$\mathbf{T}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int t(x, y) \exp\left[-j 2\pi\left(\frac{\alpha}{\lambda} x + \frac{\beta}{\lambda} y\right)\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \qquad (3\text{-}44)$$

Ainsi, on trouve le spectre angulaire de la perturbation transmise, par convolution de la perturbation incidente et d'un second spectre angulaire qui est caractéristique de l'ouverture elle-même.

Dans le cas particulier d'une onde plane unique d'amplitude unité tombant sur l'ouverture sous l'incidence normale, ce résultat prend une forme particulièrement simple. En effet:

$$\mathbf{A}_i\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = \delta\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$$

et

$$\mathbf{A}_t\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = \delta\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) * \mathbf{T}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right) = \mathbf{T}\left(\frac{\alpha}{\lambda}, \frac{\beta}{\lambda}\right)$$

Ainsi on trouve directement le spectre angulaire de l'onde transmise en calculant, la transformée de Fourier de la transmittance de l'ouverture.

En résumé, l'introduction d'une ouverture diffractante qui limite spatialement une onde incidente a pour effet d'élargir le spectre angulaire de cette perturbation. Quand l'ouverture est éclairée par une onde plane on peut trouver directement le spectre angulaire de la lumière transmise par transformation de Fourier de la transmittance de l'ouverture. Plus l'ouverture est petite plus le spectre angulaire est étalé. Un effet analogue se manifeste, on le sait, lorsqu'on produit des impulsions électriques; une limitation dans la durée d'une fonction a pour effet d'élargir son spectre de fréquences.

Le phénomène de propagation considéré comme un filtre spatial linéaire. — Considérons de nouveau la propagation de la lumière depuis le plan $z = 0$ de la figure 3-7 jusqu'au plan parallèle situé à la distance z. On peut considérer que la perturbation $\mathbf{U}(x, y, 0)$ tombant sur le premier plan est transformée, du fait de la propagation du phénomène, en une nouvelle distribution du champ $\mathbf{U}(x, y, z)$. Une telle transformation satisfait à la définition déjà donnée d'un système. Nous allons démontrer qu'en fait le phénomène de propagation se comporte comme un système linéaire spatialement invariant et qu'il est caractérisé par une fonction de transfert relativement simple.

On a déjà évoqué la linéarité du phénomène de propagation; elle découle directement de la linéarité de l'équation d'onde ou encore de l'intégrale de superposition (3-28). La propriété d'invariance spatiale se démontre plus facilement en évaluant réellement une fonction de transfert qui permette de décrire les effets de la propagation; si la transformation possède une fonction de transfert, elle doit alors être spatialement invariante.

Pour déterminer cette fonction de transfert reprenons la méthode du spectre angulaire. Cependant, plutôt que d'écrire le spectre angulaire en fonction des cosinus directeurs (α, β), il est maintenant plus commode d'exprimer le spectre en fonction

des fréquences spatiales (f_X, f_Y). Les fréquences spatiales et les cosinus directeurs sont reliés simplement par les relations (3-36).

Représentons de nouveau le spectre spatial de $\mathbf{U}(x, y, z)$ par $\mathbf{A}(f_X, f_Y; z)$ et celui de $\mathbf{U}(x, y, 0)$ par $\mathbf{A}_0(f_X, f_Y)$. Nous pouvons alors exprimer $\mathbf{U}(x, y, z)$ sous la forme:

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{A}(f_X, f_Y; z) \exp\left[j2\pi(f_X x + f_Y y)\right] \mathrm{d}f_X \, \mathrm{d}f_Y$$

Mais d'après (3-42), $\mathbf{U}(x, y, z)$ s'écrit aussi:

$$\mathbf{U}(x, y, z) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{A}_0(f_X, f_Y) \exp\left[j2\pi \frac{z}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda f_X)^2-(\lambda f_Y)^2}\right] \times \exp\left[j2\pi(f_X x + f_Y y)\right] \mathrm{d}f_X \, \mathrm{d}f_Y$$

La comparaison de ces deux expressions montre que:

$$\mathbf{A}(f_X, f_Y; z) = \mathbf{A}_0(f_X, f_Y) \exp\left[j2\pi \frac{z}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda f_X)^2-(\lambda f_Y)^2}\right] \tag{3-45}$$

On voit donc que le phénomène de propagation est caractérisé par une fonction de transfert $\mathbf{H}$ donnée par:

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y) = \frac{\mathbf{A}(f_X, f_Y; z)}{\mathbf{A}_0(f_X, f_Y)} = \exp\left[j2\pi \frac{z}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda f_X)^2-(\lambda f_Y)^2}\right] \tag{3-46}$$

Si la distance z est supérieure à quelques longueurs d'onde, on peut alors négliger les ondes évanescentes et la fonction de transfert se réduit à

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y) = \begin{cases} \exp\left[j2\pi \dfrac{z}{\lambda}\sqrt{1-(\lambda f_X)^2-(\lambda f_Y)^2}\right] & \text{si} \quad f_X^2+f_Y^2 < \dfrac{1}{\lambda^2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{3-47}$$

En conclusion, le phénomène de propagation peut être considéré comme un filtre spatial linéairement dispersif possédant une bande passante de largeur finie. La transmittance du filtre est nulle à l'extérieur d'une région circulaire de rayon λ^{-1} dans le plan des fréquences. A l'intérieur de ce domaine circulaire, le module de la fonction de transfert est égal à l'unité mais il s'introduit des variations de phase qui dépendent de la fréquence. La dispersion en phase du système est très importante pour les fréquences spatiales élevées et s'annule lorsque f_X et f_Y tendent vers zéro.

PROBLÈMES

3-1. Montrer qu'une onde sphérique divergente satisfait à la condition de rayonnement de Sommerfeld.

3-2. Montrer que l'expression (3-17) se réduit à (3-18) lorsque l'éclairage de l'ouverture est produit par une onde sphérique divergente.

3-3. On utilise la fonction de Green:

$$\mathbf{G}_+(P_1) = \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} + \frac{\exp(jkr'_{01})}{r'_{01}}$$

dans la théorie de Rayleigh-Sommerfeld.

a) Montrer que la dérivée normale de G_+ s'annule dans le plan de l'ouverture.

b) En utilisant cette fonction de Green, trouver une expression de $\mathbf{U}(P_0)$ en fonction d'une perturbation arbitraire exprimée dans le plan de l'ouverture. Quelles conditions aux limites doit-on introduire pour obtenir ce résultat?

c) En utilisant le résultat de *(b)*, trouver une expression de $\mathbf{U}(P_0)$ lorsque l'ouverture est éclairée par une onde sphérique provenant du point P_2 (voir fig. 3-5).

3-4. *a)* Une onde plane d'amplitude unité tombe sous l'incidence normale sur un écran percé d'une ouverture circulaire de diamètre d.

Déterminer le spectre angulaire de l'onde transmise par cet écran.

b) Même problème dans le cas où cet écran est un disque opaque circulaire de diamètre d.

3-5. Considérons une perturbation non-monochromatique $\mathbf{u}(P, t)$ de fréquence moyenne $\bar{\nu}$ et de largeur de bande $\Delta\nu$. Définissons une perturbation associée, à valeurs complexes, $\mathbf{u}_-(P, t)$ formée des seules composantes de fréquences négatives de $u(P, t)$ par

$$\mathbf{u}_-(P,t) = \int_{-\infty}^{0} \mathbf{U}(P,\nu) \exp(j2\pi\nu t)\, d\nu$$

où $\mathbf{U}(P, \nu)$ est le spectre de Fourier de $u(P, t)$. En considérant la figure 3-4, montrer que si:

$$\frac{\Delta\nu}{\bar{\nu}} \ll 1 \quad \text{et} \quad \frac{1}{\Delta\nu} \gg \frac{r_{01}}{c}$$

on a:

$$\mathbf{u}_-(P_0,t) = \frac{1}{j\bar{\lambda}} \iint_{\Sigma} \mathbf{u}_-(P_1,t) \frac{\exp(j\bar{k}r_{01})}{r_{01}} \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01})\, ds$$

où:

$$\bar{\lambda} = \frac{c}{\bar{\nu}} \quad \text{et} \quad \bar{k} = \frac{2\pi}{\bar{\lambda}}.$$

RÉFÉRENCES

3-1 Sommerfeld, A.: Optics, *Lectures on Theoretical Physics*, vol. IV, Academic Press Inc., New York, 1954.

3-2 Kottler, F.: Diffraction at a Black Screen, in E. Wolf (ed.), *Progress in Optics*, vol. IV, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1965.

3-3 Silver, S.: Microwave Aperture Antennas and Diffraction Theory, *J. Opt. Soc. Am.*, **52**:131 (1962).

3-4 Born, M., and E. Wolf: *Principles of Optics*, 2d rev. ed., Pergamon Press, New York, 1964.

3-5 Stroke, G. W.: Theory, Production and Use of Optical Gratings for High-Resolution Spectroscopy, *Proc. Third Intern. Conf. Quantum Electron.*, **2** (1964).

3-6 Kottler, F.: Electromagnetische Theorie der Beugung an Schwarzen Schirmen, *Ann. Physik*, (4)**71**:457 (1923).

3-7 Sommerfeld, A.: Mathematische Theorie der Diffraction, *Math. Ann.*, **47**:317 (1896).

3-8 Kottler, F.: Zur Theorie der Beugung an Schwarzen Schirmen, *Ann. Physik*, (4)**70**:405 (1923).

3-9 Baker, B. B., and E. T. Copson: *The Mathematical Theory of Huygens' Principle*, 2d ed., Clarendon Press, Oxford, 1949.

3-10 Bouwkamp, C. J.: Diffraction Theory, in A.C. Strickland (ed.), *Reports on Progress in Physics*, vol. XVII, The Physical Society, London, 1954.
3-11 Hoenl, H., A. W. Maue, and K. Westpfahl: Theorie der Beugung, in S. Fluegge (ed.), *Handbuch der Physik*, vol. 25, Springer-Verlag, Berlin, 1961.
3-12 Hildebrand, F. B.: *Advanced Calculus for Engineers*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N.J., 1948.
3-13 Sommerfeld, A.: Die Greensche Funktion der Schwingungsgleichung, *Jahresber. Deut. Math., Ver.*, **21**:309 (1912).
3-14 Kirchoff, G.: Zur Theorie der Lichtstrahlen, *Wiedemann Ann.*, (2)**18**:663 (1883).
3-15 Wolf, E., and E. W. Marchand: Comparison of the Kirchhoff and the Rayleigh-Sommerfeld Theories of Diffraction at an Aperture, *J. Opt. Soc. Am.*, **54**:587 (1964).
3-16 Maggi, G. A.: Sulla Propagazione Libera e Perturbata della Onde Luminose in un Mezzo Isotropo, *Ann. Matematica*, **16**:21 (1888).
3-17 Rubinowicz, A.: Die Beugungswelle in der Kirchhoffschen Theorie der Beugungserscheinungen, *Ann. Physik*, (14)**53**:257 (1917).
3-18 Rubinowicz, A.: The Miyamoto-Wolf Diffraction Wave, in E. Wolf (ed.), *Progress in Optics*, vol. IV, North Holland Publishing Company, Amsterdam, 1965.
3-19 Keller, J. B.: Geometrical Theory of Diffraction, *J. Opt. Sloc. Am.*, **52**:116 (1962).
3-20 Ratcliffe, J. A.: Some Aspects of Diffraction Theory and Their Application to the Ionosphere, in A. C. Strickland (ed.), *Reports on Progress in Physics*, vol. XIX, The Physical Society, London, 1956.

CHAPITRE 4

DIFFRACTION DE FRESNEL ET DIFFRACTION DE FRAUNHOFER

Au chapitre précédent nous avons présenté les résultats de la théorie scalaire de la diffraction sous leur forme la plus générale. Nous allons maintenant effectuer certaines approximations qui permettront de ramener les calculs de figures de diffraction à des opérations mathématiques plus simples. Ces approximations, que l'on fait couramment dans les divers domaines ayant trait à la propagation des ondes, seront appelées approximations de Fresnel et de Fraunhofer. Notre exposé diffère des exposés classiques de la diffraction de Fresnel et de Fraunhofer en ce sens que nous considérons le phénomène de propagation comme un «système»; nous essaierons de trouver des approximations qui soient valables pour une gamme étendue de signaux d'entrée.

4-1. – APPROXIMATIONS DU PRINCIPE DE HUYGENS-FRESNEL

Considérons de nouveau la diffraction de la lumière monochromatique par une ouverture finie Σ percée dans un plan opaque infiniment étendu. Comme l'indique la figure 4-1, nous supposons que l'écran est un plan dans lequel nous avons défini un système de coordonnées rectangulaires x_1 qui est y_1. En outre nous supposons que la région d'observation est un plan parallèle au plan de l'ouverture, situé à la distance z

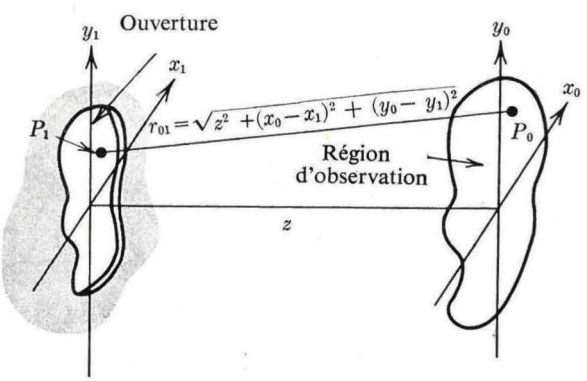


FIG. 4-1. – *Schéma précisant les notations utilisées dans l'étude de la diffraction.*

de celui-ci. On définit dans ce plan d'observation, Un système de coordonnées x_0y_0 tel que ses axes soient parallèles à ceux du plan x_1y_1.

Premières approximations. — Si nous utilisons l'expression mathématique du principe de Huygens-Fresnel, et en particulier les expressions (3-28) et (3-29), l'amplitude du champ au point (x_0, y_0) s'écrit sans difficulté:

$$\mathbf{U}(x_0, y_0) = \iint_{\Sigma} \mathbf{h}(x_0, y_0; x_1, y_1)\, \mathbf{U}(x_1, y_1)\, dx_1\, dy_1 \tag{4-1}$$

où

$$\mathbf{h}(x_0, y_0; x_1, y_1) = \frac{1}{j\lambda} \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \cos(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{r}}_{01}) \tag{4-2}$$

Désormais on écrira cette intégrale de superposition avec des limites infinies étant entendu que, conformément aux conditions aux limites de Kirchhoff, la fonction $\mathbf{U}(x_1, y_1)$ est identiquement nulle en dehors de l'ouverture Σ. D'où:

$$\mathbf{U}(x_0, y_0) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{h}(x_0, y_0; x_1, y_1)\, \mathbf{U}(x_1, y_1)\, dx_1\, dy_1 \tag{4-3}$$

Nos approximations seront fondées sur l'hypothèse que la distance z entre l'ouverture et le plan d'observation est bien plus grande que la plus grande dimension linéaire de l'ouverture Σ. En outre, nous supposerons que, dans le plan d'observation, on ne s'intéresse qu'à une région finie située autour de l'axe des z et que la distance z est aussi bien plus grande que la plus grande dimension linéaire de cette région. Avec ces hypothèses, le facteur d'obliquité est sentiblement égal à l'unité, soit:

$$\cos(\vec{\mathbf{n}} \cdot \vec{\mathbf{r}}_{01}) \cong 1$$

L'écart dû à cette approximation est inférieur à 5% si l'angle $(\vec{\mathbf{n}}, \vec{\mathbf{r}}_{01})$ n'excède pas 18°. Dans les mêmes conditions, la quantité r_{01} qui apparaît au dénominateur de (4-2) ne diffère pas de z de manière sensible, ce qui justifie pour la fonction de pondération l'approximation suivante:

$$\mathbf{h}(x_0, y_0; x_1, y_1) \cong \frac{1}{j\lambda z} \exp(jkr_{01}) \tag{4-4}$$

Remarquons que la quantité r_{01} qui intervient dans l'exposant ne peut pas être simplement remplacée par z car les erreurs qui en résulteraient seraient multipliées par un nombre k très grand, ce qui pourrait entraîner des erreurs sur la phase bien supérieures à 2π radians.

Les approximations de Fresnel. — Une première simplification peut être obtenue en faisant certaines approximations sur la quantité r_{01} figurant dans l'exposant de l'expression (4-4). D'après la figure 4-1, r_{01} est donnée rigoureusement par:

$$\begin{aligned} r_{01} &= \sqrt{z^2+(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2} \\ &= z\sqrt{1+\left(\frac{x_0-x_1}{z}\right)^2+\left(\frac{y_0-y_1}{z}\right)^2} \end{aligned} \tag{4-5}$$

Le développement binomial de la racine carrée permet de faire l'approximation suivante:

$$\sqrt{1+b} = 1+\frac{b}{2}-\frac{b^2}{8}+ \ldots \quad |b| < 1 \tag{4-6}$$

Supposons maintenant que les deux premiers termes de ce développement suffisent à représenter la racine carrée (4-5), c'est-à-dire que l'on puisse écrire:

$$z\sqrt{1+\left(\frac{x_0-x_1}{z}\right)^2+\left(\frac{y_0-y_1}{z}\right)^2} \cong z\left[1+\frac{1}{2}\left(\frac{x_0-x_1}{z}\right)^2+\frac{1}{2}\left(\frac{y_0-y_1}{z}\right)^2\right]$$

Cette approximation, que nons appellerons *approximation de Fresnel*, permet de réécrire la fonction de pondération sous la forme:

$$\mathbf{h}(x_0, y_0; x_1, y_1) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left\{j\frac{k}{2z}[(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2]\right\} \tag{4-7}$$

Quand la distance z est suffisamment grande pour que l'approximation soit bonne, on dit que le plan d'observation est situé dans le domaine de la *diffraction de Fresnel.*

Remarquons que le point délicat de cette approximation a été le remplacement des ondelettes sphériques de Huygens par des *surfaces quadratiques.* Il est bien évident qu'une telle approximation exige certaines limitations concernant les dimensions relatives de l'ouverture et de la région d'observation vis à vis de la distance z. On peut adopter la condition suffisante de validité suivante: le changement de phase maximal dû au premier terme négligé dans le développement binomial doit être nettement inférieur à 1 radian. Cette condition sera réalisée si la distance z satisfait à:

$$z^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda}\left[(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2\right]^2_{\max} \tag{4-8}$$

Cependant, général cette condition n'est pas en nécessaire. Pour que l'approximation de Fresnel reste valable, il est seulement nécessaire que les termes d'ordre plus élevé du développement ne changent pas la valeur de l'intégrale de superposition (4-3); pourqu'il en soit ainsi, la valeur maximale de chacun des facteurs de phase de la somme n'a pas besoin d'être très inférieure à 1 radian. Lorsque la distance z est trop petite pour remplir la condition (4-8), la quantité $\frac{k}{2z}$ est généralement si grande et les oscillations du facteur de phase quadratique dans l'expression (4-7) si rapides que la contribution principale à l'intégrale (4-3) est seulement due aux points P_1 voisins du point de coordonné ($x_1 = x_0$, $y_1 = y_0$) en lesquels la variation de phase est la moins rapide. Au voisinage de tels points, dits «points de phase stationnaire», la contribution à la phase du terme de second ordre est souvent complètement négligeable. Pour une discussion plus complète de ce *principe de phase stationnaire*, voir l'appendice III de la référence 3-4.

Si on admet la validité de l'approximation de Fresnel, on peut exprimer l'intégrale de superposition par l'une ou l'autre de deux formes équivalentes. D'une part $\mathbf{U}(x_0, y_0)$

peut être considérée comme une *convolution* de $\mathbf{U}(x_1, y_1)$ et $\mathbf{h}$; ainsi:

$$\mathbf{U}(x_0,y_0)=\frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\iint_{-\infty}^{\infty}\mathbf{U}(x_1,y_1)\exp\left\{j\frac{k}{2z}[(x_0-x_1)^2+(y_0-y_1)^2]\right\}dx_1\,dy_1 \qquad (4\text{-}9)$$

D'autre part, on peut développer les termes quadratiques dans l'exposant, ce qui donne:

$$\mathbf{U}(x_0, y_0) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z}\exp\left[j\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]\iint_{-\infty}^{\infty}\left\{\mathbf{U}(x_1, y_1)\exp\left[j\frac{k}{2z}(x_1^2+y_1^2)\right]\right\}$$

$$\times\exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x_0x_1+y_0y_1)\right]dx_1\,dy_1 \qquad (4\text{-}10)$$

Ainsi, mis à part les facteurs multiplicatifs de phase et d'amplitude qui sont indépendant de x_1 et y_1, on peut calculer la fonction $\mathbf{U}(x_0, y_0)$ en effectuant la *transformation de Fourier* de $\mathbf{U}(x_1, y_1)\exp\left[j\frac{k}{2z}(x_1^2+y_1^2)\right]$, cette transformée devant être évaluée aux fréquences $\left(f_X=\frac{x_0}{\lambda z},\ f_Y=\frac{y_0}{\lambda z}\right)$ pour assurer une échelle spatiale correcte dans le plan d'observation.

Revenant à la première forme, (4-9), la nature convolutive de cette équation suggère que l'on pourrait peut être mieux comprendre les phénomènes en examinant les effets de la diffraction de Fresnel dans le domaine des fréquences spatiales. Dans ce but, calculons la transformée de Fourier de la fonction de pondération spatialement invariante (4-7); on obtient ainsi la fonction de transfert:

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y) = \exp(jkz)\exp\left[-j\pi\lambda z(f_X^2+f_Y^2)\right] \qquad (4\text{-}11)$$

qui exprime les effets de la propagation dans la région de la diffraction de Fresnel.

Le premier facteur exponentiel de cette expression représente un retard de phase général subi par toutes les composantes du spectre angulaire au cours de la propagation entre les deux plan distants de z. Le deuxième facteur exponentiel représente une dispersion de phase, fonction quadratique des fréquences. La comparaison des relations (4-11) et (3-46) montre que la fonction de transfert précédente est simplement une approximation de la fonction de transfert plus générale introduite au paragraphe (3-7.)

L'approximation de Fraunhofer. — Le calcul des figures de diffraction peut être encore simplifié si on adopte des conditions encore plus restrictives que celles de l'approximation de Fresnel. En particulier, on a déjà vu que, dans la région de diffraction de Fresnel, on peut déterminer l'amplitude $\mathbf{U}(x_0, y_0)$ du champ observé en calculant la transformée de Fourier du produit de la distribution du champ $\mathbf{U}(x_1, y_1)$ sur l'ouverture par la fonction de phase quadratique $\exp\left[j\frac{k}{2z}(x_1^2+y_1^2)\right]$. Si on adopte en outre la condition plus restrictire, dite condition de Fraunhofer

$$z \gg \frac{k(x_1^2+y_1^2)_{\max}}{2} \qquad (4\text{-}12)$$

le facteur de phase quadratique est alors sensiblement égal à l'unité sur l'ouverture tout entière; on peut alors trouver directement la distribution du champ dans le plan d'observation par transformation de Fourier de la distribution même du champ sur l'ouverture. Ainsi dans le domaine de la *diffraction de Fraunhofer*

$$\mathbf{U}(x_0, y_0) = \frac{\exp(jkz)\exp\left[j\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]}{j\lambda z} \times \int\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}(x_1, y_1)\exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda z}(x_0x_1+y_0y_1)\right] dx_1\, dy_1 \qquad (4\text{-}13)$$

Mis à part les facteurs multiplicatifs qui précédent l'intégrale, on constate que cette expression est tout simplement la transformée de Fourier de la distribution du champ sur l'ouverture en fonction des fréquences $\left(f_X = \frac{x_0}{\lambda z},\ f_Y = \frac{y_0}{\lambda z}\right)$.

Aux fréquences optiques, les conditions exigées pour que l'approximation de Fraunhofer soit valable sont vraiment sévères. Par exemple, pour une longueur d'onde de 6.10^{-7} m (lumière rouge) et une ouverture de largeur 2,5 cm (1 pouce), la distance d'observation z doit satisfaire à:

$$z \gg 1600 \text{ mètres}$$

Néanmoins, ces conditions sont remplies dans un bon nombre de problèmes importants. En outre les figures de diffraction de Fraunhofer peuvent être observées à des distances plus faibles que celles qu'implique la condition (4-12) si l'ouverture est éclairée par une onde sphérique convergeant vers l'observateur (voir Pb. 4-3) ou si une lentille convergente est convenablement située entre l'observateur et l'ouverture (voir chap. 5).

Pour terminer, remarquons qu'il n'existe pas de fonction de transfert propre à la diffraction de Fraunhofer car l'approximation (4.12) a détruit l'invariance spatiale du champ diffracté (voir Pb. 2.10). Cependant, comme la diffraction de Fraunhofer est simplement un cas limite de la diffraction de Fresnel, la fonction de transfert (4-11) reste valable à la fois pour la diffraction de Fresnel et pour la diffraction de Fraunhofer.

4-2. — EXEMPLES DE FIGURES DE DIFFRACTION DE FRAUNHOFER

Nous allons considérer maintenant un certain nombre d'exemples de calculs relatifs à la diffraction de Fraunhofer. Le lecteur trouvera d'autres exemples en se reportant aux problèmes (voir Pb. 4-1, 4-2 et 4-3).

On peut appliquer directement les résultats du paragraphe précédent pour déterminer la distribution du champ complexe dans la figure de diffraction de Fraunhofer relative à une ouverture donnée quelconque. Cependant, on doit noter que les

récepteurs de radiations, y compris l'oeil, ne sont sensibles qu'à l'intensité[1] optique et non à l'amplitude du champ. Les figures de diffraction seront donc décrites en définitive par une distribution d'intensité.

Ouverture rectangulaire. — Considérons d'abord une ouverture rectangulaire dont la transmittance en amplitude est donnée par:

$$t(x_1, y_1) = \text{rect}\left(\frac{x_1}{l_X}\right) \text{rect}\left(\frac{y_1}{l_Y}\right)$$

où les constantes l_X et l_Y sont simplement les dimensions respectives de l'ouverture dans les directions x_1 et y_1. Si l'ouverture est éclairée sous l'incidence normale par une onde plane monochromatique d'amplitude unité, la distribution du champ dans l'ouverture est alors égale à la fonction transmittance t. Si on utilise l'expression (4-13) on voit que la répartition de l'amplitude dans la figure de diffraction de Fraunhofer relative à cette ouverture est:

$$\mathbf{U}(x_0, y_0) = \frac{\exp(jkz) \exp\left[j\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]}{j\lambda z} \mathcal{F}\{\mathbf{U}(x_1, y_1)\}$$

où x_0 et y_0 sont reliées à f_X et f_Y par $f_X = \dfrac{x_0}{\lambda z}$ et $f_Y = \dfrac{y_0}{\lambda z}$

En remarquant que $\mathcal{F}\{\mathbf{U}(x_1, y_1)\} = l_X l_Y \operatorname{sinc}(l_X f_X) \operatorname{sinc}(l_Y f_Y)$, on trouve:

$$\mathbf{U}(x_0, y_0) = \frac{\exp(jkz) \exp\left[j\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]}{j\lambda z} l_X l_Y \operatorname{sinc}\left(\frac{l_X x_0}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}\left(\frac{l_Y y_0}{\lambda z}\right)$$

d'où:

$$I(x_0, y_0) = \frac{l_X^2 l_Y^2}{\lambda^2 z^2} \operatorname{sinc}^2\left(\frac{l_X x_0}{\lambda z}\right) \operatorname{sinc}^2\left(\frac{l_Y y_0}{\lambda z}\right) \tag{4-14}$$

La figure 4.2 montre les variations de l'intensité dans la figure de diffraction de Fraunhofer le long de l'axe x_0. Remarquons que la distance entre les deux premiers zéros (largeur du lobe principal) est:

$$\triangle x_0 = \frac{2\lambda z}{l_X} \tag{4-15}$$

La figure 4-3 est une photographie de la figure de diffraction produite par une ouverture rectangulaire telle que le rapport des dimensions $\dfrac{l_X}{l_Y}$ soit égal à 2.

---

[1] L'intensité d'un champ optique est définie ici par $I(P) = 2\langle u^2(P, t)\rangle$ où les parenthèses angulaires $\langle\ \rangle$ indiquent qu'on fait la moyenne pendant un temps infini. Dans le cas de l'amplitude complexe $\mathbf{U}(P)$ d'un champ monochromatique cette expression se réduit à $I(P) = |\mathbf{U}(P)|^2$.

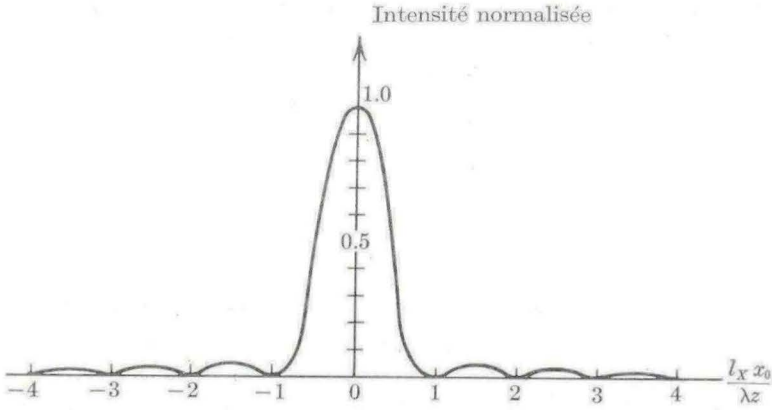


FIG. 4-2. – *Variation le long de l'axe x_0 de l'intensité dans la figure de diffraction de Fraunhofer donnée par une ouverture rectangulaire.*

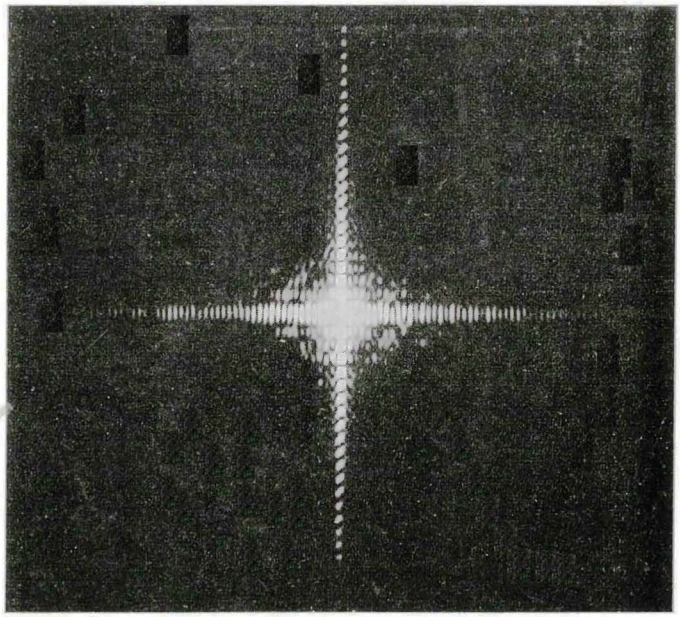


FIG. 4-3. – *Figure de diffraction de Fraunhofer donnée par une ouverture rectangulaire.*

Ouverture circulaire. — Considérons maintenant une ouverture diffractante circulaire de diamètre l. Si r_1 est la coordonnée radiale dans le plan de l'ouverture, alors:

$$t(r_1) = \text{circ}\left(\frac{r_1}{l/2}\right)$$

La symétrie circulaire du problème suggère de réécrire la transformée de Fourier figurant dans l'expression (4-13) sous la forme d'une transformée de Fourier-Bessel.

Si r_0 est la coordonnée radiale dans le plan d'observation, nous avons donc:

$$\mathbf{U}(r_0) = \frac{\exp(jkz)}{jkz} \exp\left(j\frac{kr_0^2}{2z}\right) \mathcal{B}\{\mathbf{U}(r_1)\} \tag{4-16}$$

La transformée de Fourier-Bessel $\mathcal{B}\{U(r_1)\}$ s'exprime à l'aide de la variable ϱ telle que $\varrho = \frac{r_0}{\lambda z}$. Si l'éclairement est produit par une onde plane d'amplitude unité, tombant sous l'incidence normale, nous avons $\mathbf{U}(r_1) = t(r_1)$.

Comme $$\mathcal{B}\left\{\text{circ}\left(\frac{r_1}{l/2}\right)\right\} = \left(\frac{l}{2}\right)^2 \frac{J_1(\pi l\varrho)}{\pi l\varrho/2}$$

Ainsi, on voit que la distribution en amplitude dans la figure de diffraction de Fraunhofer s'écrit:

$$\mathbf{U}(r_0) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left(j\frac{kr_0^2}{2z}\right)\left[\left(\frac{l}{2}\right)^2 \frac{J_1(\pi l r_0/\lambda z)}{\pi l r_0/2\lambda z}\right]$$

$$= \exp(jkz) \exp\left(j\frac{kr_0^2}{2z}\right) \frac{kl^2}{j8z}\left[2\frac{J_1(klr_0/2z)}{klr_0/2z}\right]$$

et la distribution en intensité peut s'écrire:

$$I(r_0) = \left(\frac{kl^2}{8z}\right)^2 \left[2\frac{J_1(klr_0/2z)}{klr_0/2z}\right]^2 \tag{4-17}$$

Cette distribution de l'intensité est généralement appelée *figure d'Airy* du nom de G. B. Airy qui fut le premier à l'établir. Le tableau 4-1 donne les valeurs des maxima et minima de la figure d'Airy; on peut en déduire que le rayon du disque central est donné par:

$$\triangle r_0 = 1{,}22\frac{\lambda z}{l} \tag{4-18}$$

TABLEAU 4-1

x	$\left[2\frac{J_1(\pi x)}{\pi x}\right]^2$	*maximum ou minimum*
0	1	max
1,220	0	min
1,635	0,0175	max
2,233	0	min
2,679	0,0042	max
3,238	0	min
3,699	0,0016	max

La figure 4-4 montre la variation de l'intensité suivant un diamètre dans la figure d'Airy alors que la figure 4-5 est une photographie de la figure de diffraction de Fraunhofer pour une ouverture circulaire.

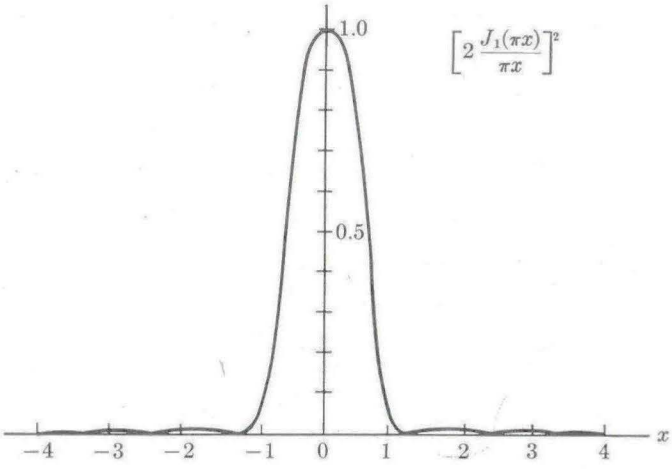


FIG. 4.4. – *Variation, suivant un diamètre, de l'intensité dans la figure d'Airy.*

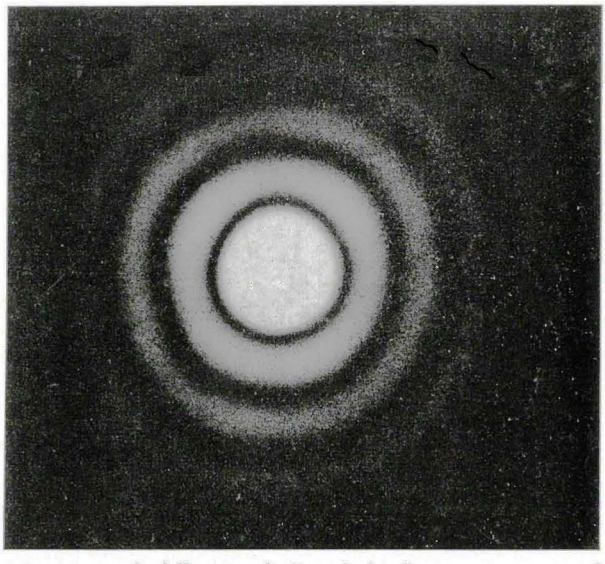


FIG. 4-5. – *Figure de diffraction de Fraunhofer d'une ouverture circulaire.*

Réseau d'amplitude sinusoïdal. — Dans les exemples précédents on a supposé que la diffraction était produite par des ouvertures percées dans des écrans opaques infinis. Nous allons maintenant généraliser la notion d'objet diffractant. Définissons la transmittance complexe en amplitude $\mathbf{t}(x_1, y_1)$ d'un écran par le rapport, en chaque point, de l'amplitude du champ immédiatement derrière l'écran à l'amplitude du champ incident. Jusqu'à maintenant nous n'avons considéré que des fonctions transmittance de la forme:

$$\mathbf{t}(x_1, y_1) = \begin{cases} 1 & \text{à l'intérieur de l'ouverture} \\ 0 & \text{en dehors de l'ouverture} \end{cases}$$

Cependant il est possible de placer sur une ouverture donnée un écran de transmittance en amplitude quelconque. On peut introduire des distributions spatiales absorbantes, par exemple à l'aide d'un cliché photographique, et obtenir ainsi toutes les valeurs réelles de **t** comprises entre zéro et un. Quant aux distributions spatiales de phase on peut les introduire au moyen de lames transparentes d'épaisseur variable, ce qui permet de donner à **t** toutes les valeurs correspondant aux points situés à l'intérieur du cercle unité dans le plan complexe ou sur ce cercle.

Comme exemple de ce type plus général d'écran diffractant, considérons un *réseau d'amplitude sinusoïdal* défini par la fonction transmittance:

$$\mathbf{t}(x_1, y_1) = \left[\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos (2\pi f_0 x_1)\right] \operatorname{rect}\left(\frac{x_1}{l}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{y_1}{l}\right) \tag{4-19}$$

où, pour des raisons de simplicité, nous avons supposé que le réseau est limité par une ouverture carrée de côté l. Le paramètre m représente la variation crête à crête de la transmittance en amplitude de l'écran et f_0 la fréquence spatiale du réseau. La figure 4-6 montre l'allure de cette fonction transmittance.

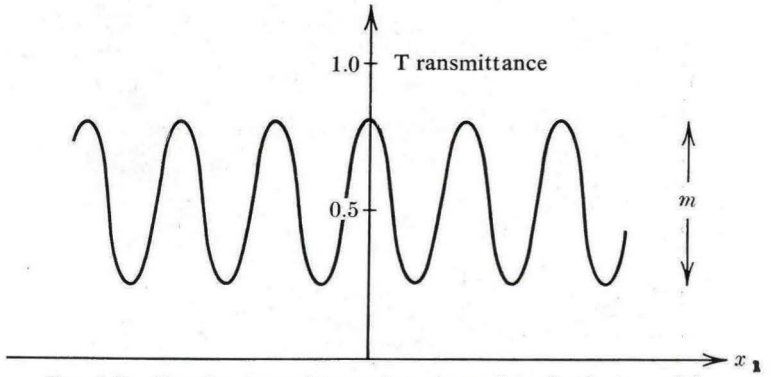


FIG. 4-6. – *Fonction transmittance d'un réseau d'amplitude sinusoïdal.*

Si l'écran est éclairé sous l'incidence normale par une onde plane monochromatique d'amplitude unité, la distribution du champ dans l'ouverture est tout simplement égale à **t**. Pour déterminer la figure de diffraction de Fraunhofer, commençons par calculer la transformée de Fourier de cette distribution. En remarquant que:

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{2} + \frac{m}{2} \cos (2\pi f_0 x_1)\right\} = \frac{1}{2}\delta(f_X, f_Y) + \frac{m}{4}\delta(f_X + f_0, f_Y) + \frac{m}{4}\delta(f_X - f_0, f_Y)$$

et que

$$\mathcal{F}\left\{\operatorname{rect}\left(\frac{x_1}{l}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{y_1}{l}\right)\right\} = l^2 \operatorname{sinc} (lf_X) \operatorname{sinc} (lf_Y)$$

on peut utiliser le théorème de convolution pour écrire:

$$\mathcal{F}\{\mathbf{U}(x_1, y_1)\} = \frac{l^2}{2} \operatorname{sinc} (lf_Y)\left\{\operatorname{sinc} (lf_X) + \frac{m}{2} \operatorname{sinc} [l(f_X + f_0)] + \frac{m}{2} \operatorname{sinc} [l(f_X - f_0)]\right\}$$

La distribution d'amplitude figure de diffraction de Fraunhofer est alors:

$$\mathbf{U}(x_0, y_0) = \frac{l^2}{j2\lambda z} \exp(jkz) \exp\left[j\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right] \operatorname{sinc}\left(\frac{ly_0}{\lambda z}\right)\left\{\operatorname{sinc}\left(\frac{lx_0}{\lambda z}\right) + \frac{m}{2}\operatorname{sinc}\left[\frac{l}{\lambda z}(x_0+f_0\lambda z)\right] + \frac{m}{2}\operatorname{sinc}\left[\frac{l}{\lambda z}(x_0-f_0\lambda z)\right]\right\} \quad (4\text{-}20)$$

Pour terminer, on peut trouver l'intensité correspondante en élevant au carré le module de l'expression (4-20). Notons que si la fréquence f_0 du réseau est nettement supérieure à $\frac{2}{l}$ le chevauchement des trois fonctions sinc qui dépendent de x_0 sera négligeable, ce qui donne:

$$I(x_0, y_0) = \left(\frac{l^2}{2\lambda z}\right)^2 \operatorname{sinc}^2\left(\frac{ly_0}{\lambda z}\right)\left\{\operatorname{sinc}^2\left(\frac{lx_0}{\lambda z}\right) + \frac{m^2}{4}\operatorname{sinc}^2\left[\frac{l}{\lambda z}(x_0+f_0\lambda z)\right] + \frac{m^2}{4}\operatorname{sinc}^2\left[\frac{l}{xz}(x_0-f_0\lambda z)\right]\right\} \quad (4\text{-}21)$$

Cette répartition de l'intensité est illustrée par la figure 4-7. Notons que cette transmittance sinusoïdale placée sur l'ouverture a dévié une partie de l'énergie de la

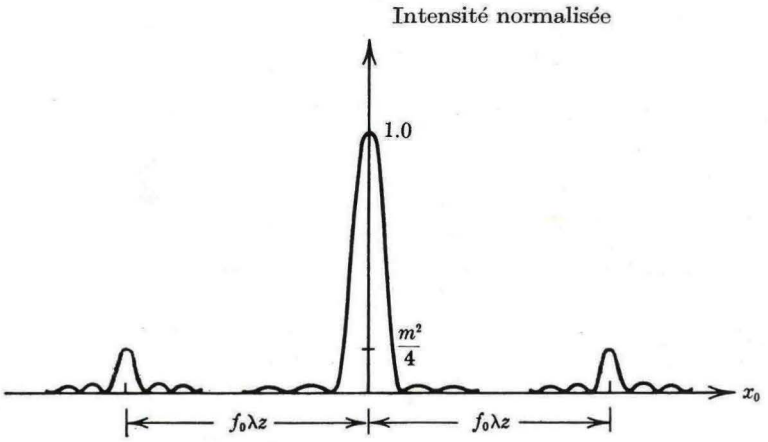


FIG. 4-7. – *Variation de l'intensité normalisée en fonction de x_0 dans la figure de diffraction d'un réseau d'amplitude sinusoïdal*

figure de diffraction initiale pour former deux figures latérales supplémentaires. La partie centrale de la figure de diffraction est appelée composante *d'ordre zéro* du diagramme de Fraunhofer alors que les deux figures latérales sont appelées composantes du *premier ordre*. La distance qui sépare les composantes du premier ordre de la composante d'ordre zéro est $f_0\lambda z$ alors que la largeur de chaque composante peut être prise égale à $\frac{\lambda z}{l}$. Il en résulte que le pouvoir de résolution du réseau en longueur

d'onde est proportionnel à la quantité $\dfrac{f_0\lambda z}{(\lambda z/l)} = f_0 l$ (voir Pb. 4-5) qui est le nombre de franges sinusoïdales contenues dans le réseau, mais qu'il est indépendant de la distance d'observation z. Pour terminer, soulignons que nos résultats ont été fondées sur la théorie scalaire et par conséquent qu'ils ne sont vérifiés par l'expérience que lorsque la fréquence du réseau est petite devant $\dfrac{1}{\lambda}$. Lorsque cette condition n'est pas satisfaite, il est nécessaire d'adopter une méthode vectorielle plus rigoureuse basée sur les équations de Maxwell.

Réseau de phase sinusoïdal. — Comme dernier exemple de calcul de diffraction de Fraunhofer, considérons un *réseau de phase sinusoïdal* défini par la fonction transmittance:

$$\mathbf{t}(x_1, y_1) = \exp\left[j\frac{m}{2}\sin(2\pi f_0 x_1)\right] \operatorname{rect}\left(\frac{x_1}{l}\right)\cdot\operatorname{rect}\left(\frac{y_1}{l}\right) \tag{4-22}$$

où, grâce à un choix convenable de la phase de référence, nous avons éliminé le facteur représentant le retard de phase moyen dû à la traversée du réseau. Le paramètre m représente la variation de phase crête à crête.

Si le réseau est éclairé par une onde plane d'amplitude unité tombant sous l'incidence normale, la distribution du champ, immédiatement derrière le réseau est donnée précisément par l'expression (4-22). Les calculs se simplifient si on utilise l'identité:

$$\exp\left[j\frac{m}{2}\sin(2\pi f_0 x_1)\right] = \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{m}{2}\right)\exp(j2\pi q f_0 x_1)$$

où J_q est une fonction de Bessel de première espèce d'ordre q. Ainsi:

$$\begin{aligned}\mathcal{F}\{\mathbf{U}(x_1, y_1)\} &= \mathcal{F}\{\mathbf{t}(x_1, y_1)\}\\ &= l^2\operatorname{sinc}(lf_X)\cdot\operatorname{sinc}(lf_Y) * \left[\sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{m}{2}\right)\delta(f_X - qf_0, f_Y)\right]\\ &= \sum_{q=-\infty}^{\infty} l^2 J_q\left(\frac{m}{2}\right)\operatorname{sinc}[l(f_X - qf_0)]\operatorname{sinc}(lf_Y)\end{aligned}$$

et l'amplitude complexe du champ dans la figure de diffraction peut s'écrire:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(x_0, y_0) = \frac{l^2}{j\lambda z}\exp(jkz)\cdot\exp\left[j\frac{k}{2z}(x_0^2+y_0^2)\right]\\ \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q\left(\frac{m}{2}\right)\operatorname{sinc}\left[\frac{l}{\lambda z}(x_0 - qf_0\lambda z)\right]\operatorname{sinc}\left(\frac{ly_0}{\lambda z}\right)\end{aligned} \tag{4-23}$$

Si nous supposons ici encore que $f_0 \gg \dfrac{2}{l}$, le chevauchement entre les divers termes de diffraction est négligeable et l'intensité correspondante de la figure de diffraction devient:

$$I(x_0, y_0) = \left(\frac{l^2}{\lambda z}\right)^2 \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_q^2\left(\frac{m}{2}\right)\operatorname{sinc}^2\left[\frac{l}{\lambda z}(x_0 - qf_0\lambda z)\right]\operatorname{sinc}^2\left(\frac{ly_0}{\lambda z}\right) \tag{4-24}$$

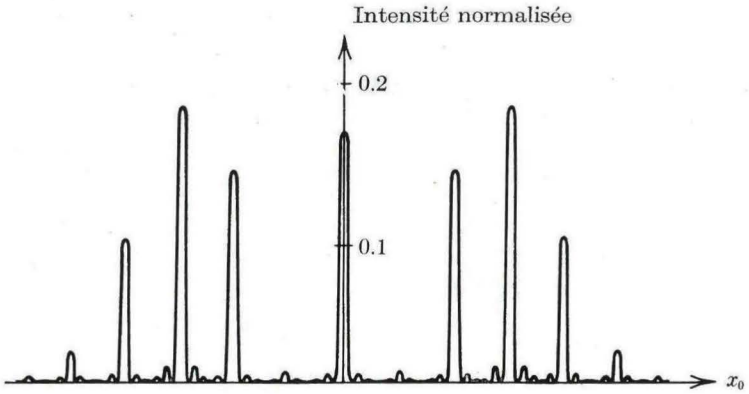


FIG. 4-8. – *Variation de l'intensité dans la figure de diffraction de Fraunhofer relative à un réseau de phase sinusoïdal* (m = 8 radians).

L'introduction d'un réseau de phase sinusoïdal a ainsi dévié une partie de l'énergie en dehors de la composante d'ordre zéro pour former une multitude de composantes d'ordre plus élevé. L'intensité maximale de la composante d'ordre q a pour valeur $\left[\frac{l^2 J_q(m/2)}{\lambda z}\right]^2$ alors que la distance de cette composante au centre de la figure de diffraction est $qf_0\lambda z$. La figure 4-8 montre la répartition de l'intensité lorsque la variation de phase crête à crête vaut 8 radians ($m = 8$ rd). La figure 4-9 représente la courbe $J_q^2\left(\frac{m}{2}\right)$ en fonction de m/2 pour différentes valeurs de q. Remarquons que toutes les fois que $m/2$ est une *racine* de J_0 la composante d'ordre zéro disparaît complètement!

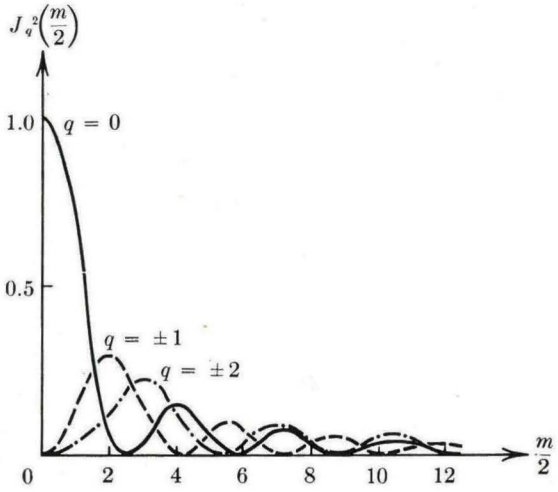


FIG. 4-9. – J_q^2 *en fonction de* $m/2$ *pour trois valeurs de* $\pm q$.

4-3. — EXEMPLE DE FIGURE DE DIFFRACTION DE FRESNEL

Le calcul de la figure de diffraction de Fresnel est en général bien plus difficile que le calcul correspondant de la figure de diffraction de Fraunhofer. Comme exemple de calcul de figure de diffraction de Fresnel nous considèrerons seulement le cas d'une ouverture rectangulaire; d'autres exemples sont proposés dans les problèmes 4-3, 4-4 et 4-5.

Eclairons sous l'incidence normale une ouverture carrée de côté p, par une onde monochromatique plane d'amplitude unité. La distribution du champ immédiatement derrière l'ouverture peut alors s'écrire:

$$\mathbf{U}(x_1, y_1) = \text{rect}\left(\frac{x_1}{l}\right) \cdot \text{rect}\left(\frac{y_1}{l}\right) \tag{4-25}$$

Il est ici bien plus commode d'utiliser la forme convolutive de l'équation de la diffraction de Fresnel, qui donne l'expression suivante du champ diffracté:

$$\mathbf{U}(x_0, y_0) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \int \exp\left\{\frac{jk}{2z}\left[(x_1-x_0)^2+(y_1-y_0)^2\right]\right\} dx_1\, dy_1$$

On peut séparer les deux intégrations et mettre cette expression sous la forme du produit de deux intégrales:

$$\mathbf{U}(x_0, y_0) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \mathbf{J}(x_0)\, \mathbf{J}(y_0) \tag{4-26}$$

où

$$\mathbf{J}(x_0) = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \exp\left[j\frac{k}{2z}(x_1-x_0)^2\right] dx_1$$

$$\mathbf{J}(y_0) = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \exp\left[j\frac{k}{2z}(y_1-y_0)^2\right] dy_1$$

Ces intégrales se simplifient considérablement grâce aux changements de variables

$$\xi = \sqrt{\frac{k}{\pi z}}(x_1-x_0) \quad \text{et} \quad \eta = \sqrt{\frac{k}{\pi z}}(y_1-y_0)$$

qui donnent:

$$\mathbf{J}(x_0) = \sqrt{\frac{\pi z}{k}} \int_{\xi_1}^{\xi_2} \exp\left(j\frac{\pi}{2}\xi^2\right) d\xi$$

$$\mathbf{J}(y_0) = \sqrt{\frac{\pi z}{k}} \int_{\eta_1}^{\eta_2} \exp\left(j\frac{\pi}{2}\eta^2\right) d\eta$$

où les limites d'intégration sont:

$$\xi_1 = -\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{l}{2}+x_0\right); \quad \xi_2 = \sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{l}{2}-x_0\right)$$
$$\eta_1 = -\sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{l}{2}+y_0\right); \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{k}{\pi z}}\left(\frac{l}{2}-y_0\right) \tag{4-27}$$

Les intégrales $\mathbf{J}(x_0)$ et $\mathbf{J}(y_0)$ peuvent être évaluées à l'aide de fonctions appelées *intégrales de Fresnel* définies par:

$$C(\alpha) = \int_0^{\alpha} \cos\frac{\pi t^2}{2}\,\mathrm{d}t \text{ et } S(\alpha) = \int_0^{\alpha} \sin\frac{\pi t^2}{2}\,\mathrm{d}t \tag{4-28}$$

dont il existe des tables.
En remarquant que:

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \exp\left(j\frac{\pi}{2}\xi^2\right)\mathrm{d}\xi = \int_0^{\xi_2} \exp\left(j\frac{\pi}{2}\xi^2\right)\mathrm{d}\xi - \int_0^{\xi_1} \exp\left(j\frac{\pi}{2}\xi^2\right)\mathrm{d}\xi$$

nous pouvons écrire:

$$\mathbf{J}(x_0) = \sqrt{\frac{\pi z}{k}}\{[C(\xi_2)-C(\xi_1)]+j[S(\xi_2)-S(\xi_1)]\}$$
$$\mathbf{J}(y_0) = \sqrt{\frac{\pi z}{k}}\{[C(\eta_2)-C(\eta_1)]+j[S(\eta_2)-S(\eta_1)]\} \tag{4-29}$$

Enfin, la substitution de (4-29) dans (4-26) donne la distribution du champ complexe:

$$\mathbf{U}(x_0, y_0) = \frac{\exp(jkz)}{2j}\{[C(\xi_2)-C(\xi_1)]+j[S(\xi_2)-S(\xi_1)]\} \times\{[C(\eta_2)-C(\eta_1)]+j[S(\eta_2)-S(\eta_1)]\} \tag{4-30}$$

La distribution d'intensité correspondante s'écrit:

$$I(x_0,y_0) = \frac{1}{4}\{[C(\xi_2)-C(\xi_1)]^2+[S(\xi_2)-S(\xi_1)]^2\}\{[C(\eta_2)-C(\eta_1)]^2+[S(\eta_2)-S(\eta_1)]^2\} \tag{4-31}$$

La construction graphique connue sous le nom de *spirale de Cornu* constitue un moyen commode pour interpréter ces expressions; c'est une représentation simultanée de $C(\alpha)$ et $S(\alpha)$ en fonction du paramètre α comme le montre la figure 4-10. Remarquons que la quantité $C(\alpha)+j\,S(\alpha)$ peut être représentée par le vecteur du plan complexe joignant l'origine au point d'abscisse curviligne α sur la spirale. Il s'ensuit que la quantité $\{[C(\xi_2)-C(\xi_1)]+j[S(\xi_2)-S(\xi_1)]\}$ est représentée dans le plan complexe par un vecteur ayant pour origine le point ξ_1 sur la spirale et pour extrémité le point ξ_2. En utilisant cette technique, on peut évaluer en chaque point de la figure de diffraction les expressions (4-30) et (4-31).

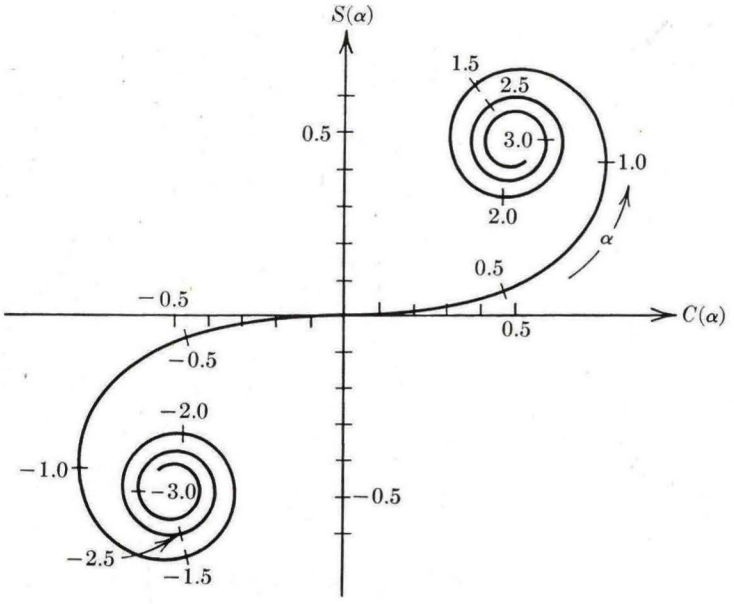


FIG. 4-10. – *La spirale de Cornu.*

Pour illustrer ce type de calcul, considérons la distribution du champ $\mathbf{U}(x_0, y_0)$ à une très petite distance z de l'ouverture, mais assez loin toutefois de l'ouverture pour que les approximations de Fresnel demeurent valables. Pour z suffisamment petit, $\frac{k}{\pi z}$ est un nombre extrêmement grand ce qui rend les approximations suivantes des expressions (4.27) parfaitement justifiées:

$$\xi_1 \cong \begin{cases} -\infty & x_0 > -\frac{l}{2} \\ +\infty & x_0 < -\frac{l}{2} \end{cases} \qquad \xi_2 \cong \begin{cases} -\infty & x_0 > \frac{l}{2} \\ +\infty & x_0 < \frac{l}{2} \end{cases}$$

$$\eta_1 \cong \begin{cases} -\infty & y_0 > -\frac{l}{2} \\ +\infty & y_0 < -\frac{l}{2} \end{cases} \qquad \eta_2 \cong \begin{cases} -\infty & y_0 > \frac{l}{2} \\ +\infty & y_0 < \frac{l}{2} \end{cases}$$

En se reportant à la spirale de Cornu, on voit que les valeurs correspondantes de $C(\alpha)$ et $S(\alpha)$ sont:

$$C(\xi_1) = S(\xi_1) \cong \begin{cases} -\frac{1}{2} & x_0 > -\frac{l}{2} \\ +\frac{1}{2} & x_0 < -\frac{l}{2} \end{cases}$$

$$C(\xi_2) = S(\xi_2) \cong \begin{cases} -\frac{1}{2} & x_0 > \frac{l}{2} \\ +\frac{1}{2} & x_0 < \frac{l}{2} \end{cases}$$

$$C(\eta_1) = S(\eta_1) \cong \begin{cases} -\frac{1}{2} & y_0 > -\frac{l}{2} \\ +\frac{1}{2} & y_0 < -\frac{l}{2} \end{cases}$$

$$C(\eta_2) = S(\eta_2) \cong \begin{cases} -\frac{1}{2} & y_0 > \frac{l}{2} \\ +\frac{1}{2} & y_0 < \frac{l}{2} \end{cases}$$

En substituant ces résultats dans l'équation (4.30), nous trouvons:

$$\mathbf{U}(x_0 y_0) = \exp(jkz) \cdot \operatorname{rect}\left(\frac{x_0}{l}\right) \cdot \operatorname{rect}\left(\frac{y_0}{l}\right) \tag{4-32}$$

Ainsi, dans la région de la diffraction de Fresnel située très près du plan de l'ouverture, la distribution du champ $\mathbf{U}(x_0, y_0)$ est la projection géométrique de la distribution du champ sur l'ouverture $\mathbf{U}(x_1, y_1)$; on retrouve bien les résultats de l'optique géométrique. Ce fait n'est évidemment pas particulier à l'ouverture rectangulaire; on peut montrer qu'il est valable pour des ouvertures quelconques en utilisant le principe de la phase stationnaire (réf. 3.4, app. III).

PROBLÈMES

4-1. Soit une onde plane d'amplitude unité tombant sous l'incidence normale sur la double fente représentée par la figure P. 4-1

a) Déterminer la distribution d'intensité dans le diagramme de diffraction de Fraunhofer.

b) Représenter les variations d'intensité de ce diagramme le long des axes x_0 et y_0 du plan d'observation en supposant que $\frac{X}{\lambda z} = 10\ \mathrm{m}^{-1}$, $\frac{Y}{\lambda z} = 1\ m^{-1}$ et $\frac{\triangle}{\lambda z} = 1{,}5\ \mathrm{m}^{-1}$, z est la distance d'observation et λ la longueur d'onde.

4-2. *a)* Faire un schéma de l'ouverture dont la fonction de transmission s'écrit:

$$t(x_1, y_1) = \left\{\left[\operatorname{rect}\left(\frac{x_1}{X}\right) \operatorname{rect}\left(\frac{y_1}{Y}\right)\right] * \left[\frac{1}{\triangle} \operatorname{pgn}\left(\frac{y_1}{\triangle}\right) \delta(x_1)\right]\right\} \operatorname{rect}\left(\frac{y_1}{N \cdot \triangle}\right)$$

où N est un entier impair et où $\triangle > Y$.

b) Déterminer l'expression de la distribution d'intensité dans le diagramme de Fraunhofer de cette ouverture en supposant qu'elle est éclairée par une onde plane tombant sous l'incidence normale et que $N \gg 1$.

c) Quelle relation doit-il exister entre Y et $\triangle$ pour que l'intensité des composantes d'ordre impair de la figure de diffraction soit minimale et que la composante d'ordre zéro soit pratiquement inchangée?

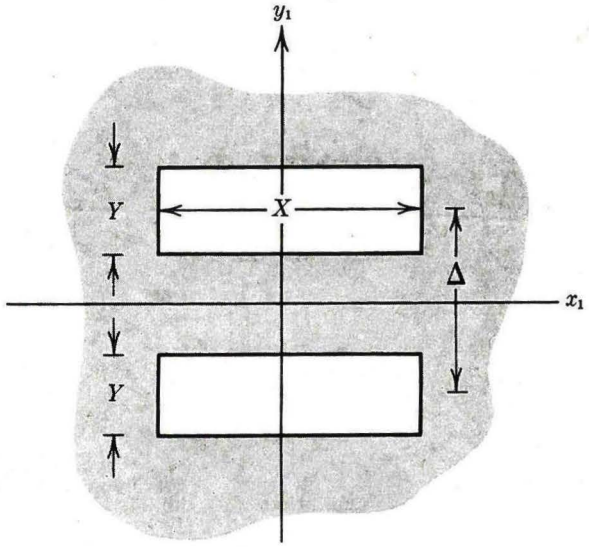


FIG. P 4-1.

4-3. Une ouverture Σ percée dans un écran opaque est éclairée par une onde sphérique convergeant vers un point P situé dans un plan parallèle à l'écran, à la distance z de celui-ci, comme l'indique la figure P 4-3.

a) Trouver une approximation quadratique de l'expression de l'onde incidente dans le plan de l'ouverture, dans les deux cas suivants: 1°) d'un P est situé sur l'axe Oz, 2°) d'un P a pour coordonnées (O, Y_0).

b) En supposant que le phénomène de diffraction produit par l'ouverture et observé dans le plan contenant P soit de la classe *de Fresnel*, montrer que dans les deux cas précédents la distribution d'intensité s'identifie au diagramme de diffraction de *Fraunhofer* de l'ouverture, centré au point P.

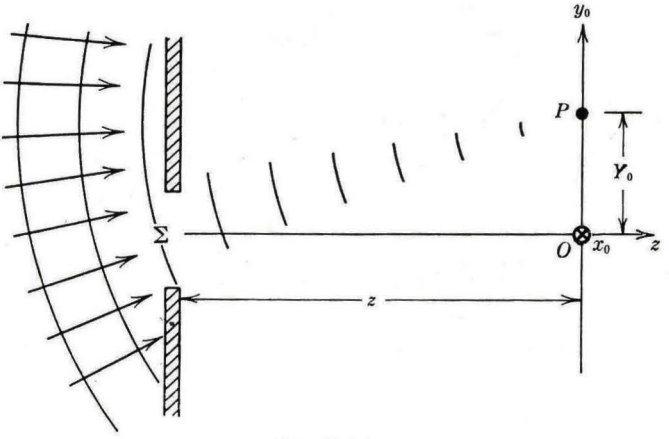


FIG. P 4-3.

4-4. Les transmittances respectives de deux ouvertures éclairées par une onde plane d'amplitude unité et d'incidence normale sont les suivantes:

a) $t(x_1, y_1) = \text{circ}\sqrt{x_1^2+y_1^2}$

b) $t(x_1, y_1) = \begin{cases} 1 & a \leqslant \sqrt{x_1^2+y_1^2} \leqslant 1 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$ où $a < 1$

Calculer, sur *l'axe de ces ouvertures*, la distribution d'intensité des figures de diffraction *de Fresnel* correspondantes.

4-5. Deux raies spectrales d'une source lumineuse sont dites «justes résolues» par un réseau de diffraction, si l'intensité maximale de la composante diffractée d'ordre q relative à la longueur d'onde λ_1, coïncide exactement avec le premier zéro de la composante diffractée d'ordre q relative à la longueur d'onde λ_2. Le pouvoir de résolution du réseau est défini par le rapport de la longueur d'onde moyenne λ à la différence $\Delta\lambda$ des deux longueurs d'ondes séparables. Montrer que le pouvoir de résolution du réseau de phase sinusoïdal étudié dans ce chapitre est:

$$\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = qlf_0 = qM$$

où q est l'ordre de diffraction utilisé pour la mesure et où M est le nombre de périodes spatiales gravées dans le réseau. Quels phénomènes limitent l'emploi d'ordres de diffraction aussi élevé qu'on le voudrait?

4-6. En supposant que l'éclairement est produit par une onde plane tombant sous l'incidence normale et en négligeant le fait que l'ouverture a une étendue finie:

a) Déterminer le diagramme de diffraction de *Fresnel* d'un écran dont la transmittance est la suivante:

$$t(x_1, y_1) = \frac{1}{2}(1 + m \cos 2\pi f_0 x)$$

b) Dans le cas où $m \ll 1$, à quelle distance z de l'ouverture, la distribution du champ dans un plan parallèle est-elle:

1° purement modulée en *amplitude*?

2° approximativement modulée en *phase*?

4-7. Déterminer une expression de la distribution d'intensité du diagramme de diffraction de Fraunhofer produit par l'ouverture représentée par la figure P 4-7. On supposera l'éclairement produit par une onde plane, d'amplitude unité, qui tombe sous l'incidence normale.

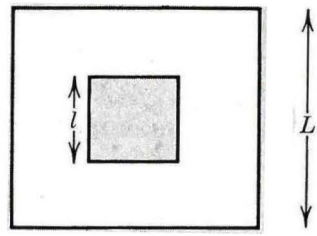


FIG. P 4-7.

CHAPITRE 5

PROPRIÉTÉS DES LENTILLES RELATIVES A LA TRANSFORMATION DE FOURIER ET A LA FORMATION DES IMAGES

Les lentilles constituent évidemment les éléments les plus importants des systèmes formant des images optiques et des systèmes de traitement optique de l'information. Une discussion complète des propriétés des lentilles aurait été utile, mais une telle étude exigerait que l'on revienne sur les principes de base de l'optique géométrique ce qui nous mènerait trop loin. Comme une telle discussion n'est pas essentielle pour la suite de l'ouvrage, nous adopterons un point de vue différent qui, bien que ne reposant pas directement sur les principes de l'optique géométrique, est néanmoins parfaitement en accord avec eux. Nous limiterons notre exposé au cas d'une onde monochromatique, la généralisation au cas d'ondes non-monochromatiques étant reportée au chapitre 6.

5-1. — LA LENTILLE MINCE CONSIDÉRÉE COMME UN TRANSFORMATEUR DE PHASE

Une lentille est constituée d'un matériau optiquement dense, généralement du verre, dans lequel la vitesse de propagation d'une perturbation optique est moins grande que dans l'air. Une lentille est dite *lentille mince* si un rayon lumineux entrant par une face au point de coordonnées (x, y) émerge en un point de la face opposée ayant sensiblement les mêmes coordonnées, c'est-à-dire si la translation du rayon lumineux à l'intérieur de la lentille est négligeable. Ainsi une lentille mince retarde simplement la phase de l'onde incidente d'une quantité proportionnelle à l'épaisseur de la lentille en tout point de coordonnées (x, y).

Soit Δ_0 l'épaisseur maximale de la lentille et soit $\Delta(x, y)$ l'épaisseur au point de coordonnées (x, y) (fig. 5-1). Le retard total de phase subi par l'onde au point de coordonnées (x, y) à la traversée de la lentille peut alors s'écrire:

$$\phi(x, y) = kn\,\Delta(x, y) + k[\Delta_0 - \Delta(x, y)]$$

où n est l'indice de réfraction du matériau constituant la

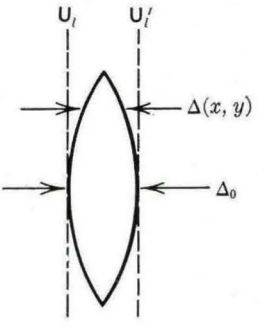


FIG. 5-1. – *La fonction épaisseur.*

lentille, $kn\Delta(x, y)$ est le retard de phase introduit par la lentille et $k[\Delta_0 - \Delta(x, y)]$ est le retard de phase introduit par la région restante de l'espace libre entre les deux plans tangents. Ceci revient à représenter l'effet produit par une lentille à l'aide d'une transformation de phase de la forme:

$$\mathbf{t}_l(x, y) = \exp[jk\,\Delta_0] \exp[jk(n-1)\,\Delta(x, y)] \tag{5-1}$$

Le champ complexe $\mathbf{U}_l'(x, y)$ dans un plan tranversal situé immédiatement derrière la lentille est alors relié au champ complexe incident dans le plan transversal situé immédiatement en avant de la lentille par:

$$\mathbf{U}_l'(x, y) = \mathbf{t}_l(x, y)\,\mathbf{U}_l(x, y) \tag{5-2}$$

Il nous reste à préciser la forme mathématique de la fonction épaisseur, afin de mieux comprendre les effets d'une lentille.

La fonction épaisseur. — En vue de préciser la nature des transformations de phase produites par les différents types de lentilles, adoptons d'abord une convention de signe: lorsque la lumière se propage de la gauche vers la droite, chaque surface convexe qu'elle rencontre a un rayon de courbure positif, tandis que chaque surface concave a un rayon de courbure négatif. Ainsi, dans la figure 5-1, le rayon de courbure de la surface de gauche de la lentille est un nombre positif R_1 alors que le rayon de courbure de la surface de droite est un nombre négatif R_2.

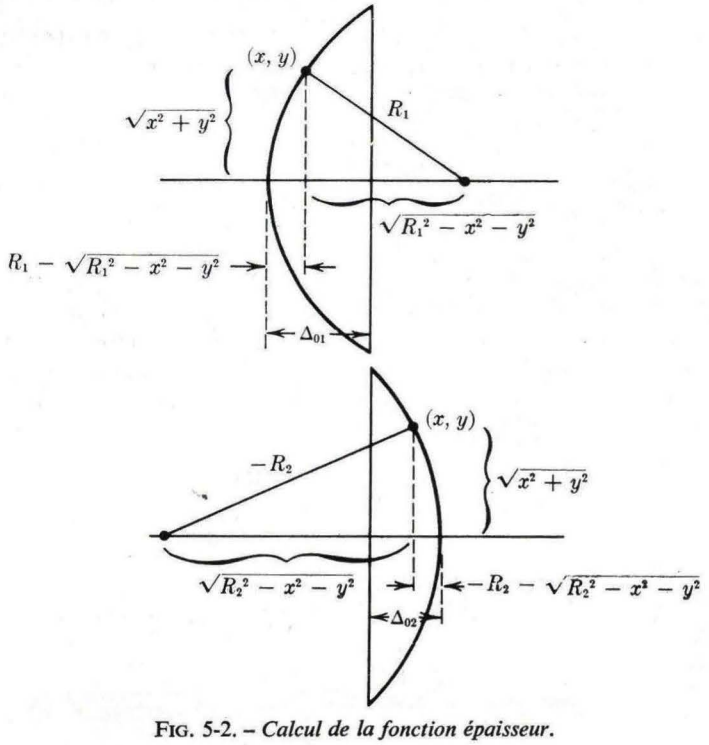


FIG. 5-2. – *Calcul de la fonction épaisseur.*

Pour trouver l'épaisseur $\Delta(x, y)$ séparons la lentille en deux parties comme le montre la figure 5-2 et écrivons la fonction épaisseur sous la forme:

$$\Delta(x, y) = \Delta_1(x, y)+\Delta_2(x, y) \tag{5-3}$$

D'après la figure, l'épaisseur $\Delta_1(x, y)$ est donnée par:

$$\begin{aligned}\Delta_1(x, y) &= \Delta_{01}-\left(R_1-\sqrt{R_1^2-x^2-y^2}\right)\\ &= \Delta_{01}-R_1\left(1-\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{R_1^2}}\right)\end{aligned} \tag{5-4}$$

De même:

$$\begin{aligned}\Delta_2(x, y) &= \Delta_{02}-\left(-R_2-\sqrt{R_2^2-x^2-y^2}\right)\\ &= \Delta_{02}+R_2\left(1-\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{R_2^2}}\right)\end{aligned} \tag{5-5}$$

où nous avons mis en facteur le nombre positif $-R_2$.
En combinant (5-3), (5-4) et (5-5) on voit que la fonction épaisseur est:

$$\Delta(x, y) = \Delta_0-R_1\left(1-\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{R_1^2}}\right)+R_2\left(1-\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{R_2^2}}\right) \tag{5-6}$$

avec

$$\Delta_0 = \Delta_{01}+\Delta_{02}$$

L'approximation paraxiale. — L'expression de la fonction épaisseur peut être notablement simplifiée si on se limite aux parties de la surface d'onde situées au voisinage de l'axe de la lentille ou, ce qui revient au même, si on ne considère que les rayons paraxiaux. Aussi nous nous limiterons aux valeurs de x et y assez petites pour justifier les approximations suivantes:

$$\begin{aligned}\sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{R_1^2}} &\cong 1-\frac{x^2+y^2}{2R_1^2}\\ \sqrt{1-\frac{x^2+y^2}{R_2^2}} &\cong 1-\frac{x^2+y^2}{2R_2^2}\end{aligned} \tag{5-7}$$

Il est bien évident que la transformation de phase qui en résulte ne représentera la lentille avec précision que sur une surface limitée, mais il faut noter que cette limitation n'est pas plus restrictive que l'approximation paraxiale utilisée en optique géométrique. Remarquons que les relations (5-7) reviennent à assimiler les surfaces sphériques de la lentille à des surfaces paraboliques. Avec ces approximations la fonction épaisseur devient:

$$\Delta(x, y) = \Delta_0-\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right) \tag{5-8}$$

La transformation de phase et sa signification physique. — La substitution de (5-8) dans (5-1) donne pour expression de la transformation produite par la lentille, l'approximation paraxiale suivante:

$$t_l(x, y) = \exp\left[jkn\Delta_0\right]\exp\left[-jk(n-1)\frac{x^2+y^2}{2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)\right]$$

Les grandeurs physiques caracteristique d'une lentille (n, R_1 et R_2) peuvent être combinées en un seul nombre φ, appelé *distance focale*, défini par:

$$\frac{1}{\varphi} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) \tag{5-9}$$

La transformation de phase peut alors se mettre sous la forme:

$$\mathbf{t}_l(x, y) = \exp(jkn\Delta_0) \exp\left[-j\frac{k}{2\varphi}(x^2+y^2)\right] \tag{5-10}$$

Cette équation servira à représenter les effets d'une lentille sur une perturbation incidente.

Remarquons que le calcul de cette expression a été fait dans le cas particulier d'une lentille ayant la forme représentée par la figure 5-1, mais que la convention de signe adoptée permet d'appliquer ce résultat aux autres types de lentilles. La figure 5-3 montre différentes lentilles formées de combinaisons diverses de surfaces convexes et concaves.

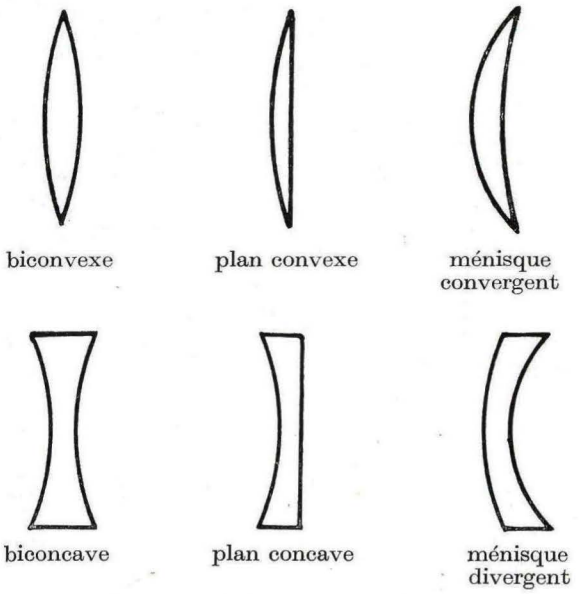


FIG. 5-3. – *Divers types de lentilles.*

Dans le problème 5-1, on demande au lecteur de vérifier que la convention de signe adoptée ici implique que la distance focale φ des lentilles biconvexe, plan convexe et du ménisque convergent est *positive*, alors que celle des lentilles biconcave plan concave et du ménisque divergent est *négative*. On peut ainsi utiliser l'expression (5-10) pour représenter l'une quelconque de ces lentilles à condition de tenir compte du signe de la distance focale.

Pour mieux comprendre la signification physique de la transformation de phase effectuée par une lentille, étudions l'effet d'une lentille sur une onde d'amplitude

unité tombant sous l'incidence normale. Dans le plan tangent à la face avant de la lentille, la distribution du champ est donc telle que $\mathbf{U}_l = 1$; d'après la relation (5-2) l'expression de $\mathbf{U}'_l$ à la sortie de la lentille est la suivante:

$$\mathbf{U}'_l(x, y) = \exp(jkn\Delta_0) \exp\left[-j\frac{k}{2\varphi}(x^2+y^2)\right]$$

Le premier facteur représente simplement un retard de phase constant; quant au second, nous pouvons l'interpréter comme une approximation quadratique d'une onde sphérique. Si la distance focale φ est positive, l'onde sphérique converge alors en un point de l'axe de la lentille situé à la distance φ de cette dernière. Si φ est négative, l'onde sphérique diverge à partir d'un point situé sur l'axe de la lentille à une distance φ en avant de celle-ci. La figure 5-4 illustre ces deux cas. Cela justifie la dénomination de lentille convergente lorsque la distance focale est positive et de lentille divergente lorsque la distance focale est négative.

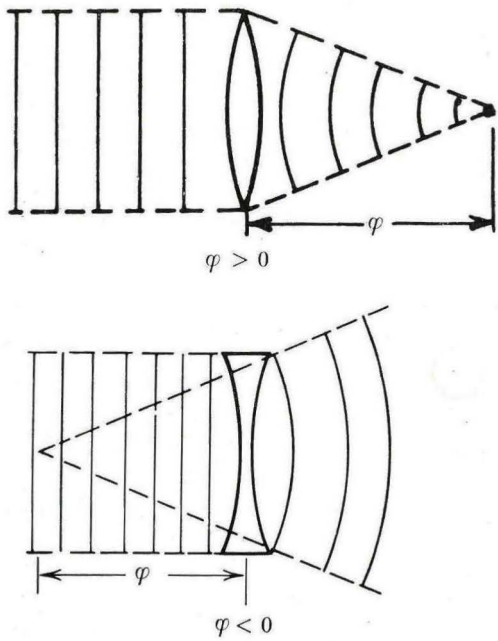


FIG. 5-4. – *Effet d'une lentille convergente et d'une lentille divergente sur une plane onde tombant sous l'incidence normale.*

Le fait qu'une lentille limitée par des surfaces sphériques transforme une onde incidente plane en une onde sphérique est fondé sur l'approximation paraxiale. Si cette condition n'est pas remplie, la surface de l'onde émergente présentera des écarts par rapport à l'onde sphérique parfaite (écarts appelés *aberrations*, voir § 6-4) même si les surfaces de la lentille sont parfaitement sphériques. "Ne pas aller à la ligne."

En fait pour améliorer la sphéricité de l'onde émergente, on «corrige» souvent les lentilles de leurs aberrations par un polissage qui rend leurs surfaces asphériques.

Soulignons que les résultats qui découleront de l'emploi de la transformation de phase (5-10) sont en réalité plus généraux que ne le laisserait supposer la démonstration de cette relation. Une analyse complète, basée sur l'optique géométrique, de la plupart des systèmes de lentilles bien corrigés, montre que leurs propriétés sont identiques à celles que nous avons déduites de notre étude sommaire.

5-2. — PROPRIÉTÉS DES LENTILLES RELATIVES À LA TRANSFORMATION DE FOURIER

L'une des propriétés les plus remarquables et les plus utiles d'une lentille convergente est son aptitude naturelle à réaliser une transformation de Fourier bidimensionnelle. La transformation de Fourier fait penser généralement à des analyseurs électroniques de fréquences, encombrants, complexes et coûteux, alors que cette opération analogique compliquée peut être réalisée avec une extrême simplicité dans un système optique utilisé en lumière cohérente.

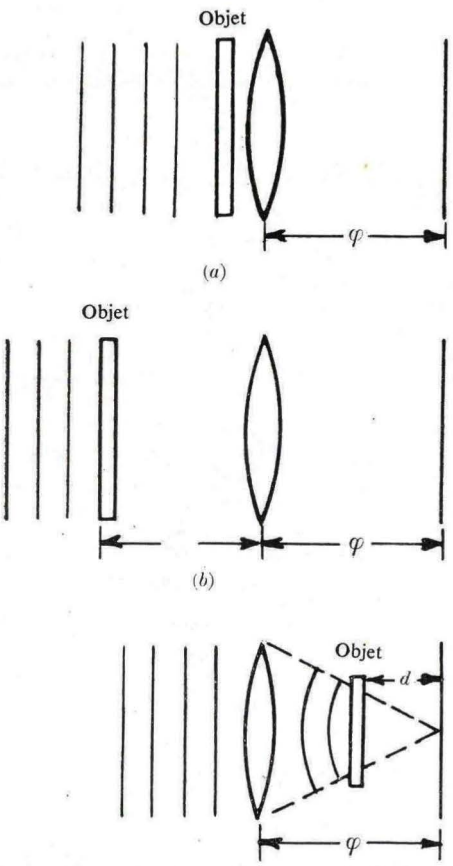


FIG. 5-5. — a) *Objet placé contre la lentille,* b) *Objet placé en avant de la lentille,* c) *Objet placé derrière la lentille.*

Dans ce qui suit on considèrera, trois configurations différentes pour réaliser cette transformation. On supposera dans tous les cas l'éclairage monochromatique et on s'intéressera à la distribution de amplitude de la lumière dans le plan focal[1] image de la lentille. La figure 5-5*a-c* représente les trois configurations considérées. Dans le cas (*a*) l'objet dont on recherche la transformée est placé tout contre la lentille. Dans le cas (*b*) l'objet est placé à une distance d_0 en avant de la lentille. Dans le cas (*c*) l'objet est placé en arrière de la lentille à une distance d du plan focal. Pour une étude plus complète des propriétés des lentilles relatives à la transformation de Fourier, le lecteur pourra consulter les références 5-1, 5-2 ou 5-3.

Objet placé contre la lentille. — Soit un objet plan de transmittance en amp-

[1] Les plans focaux objet et image d'une lentille convergente sont les plans normaux à l'axe de la lentille situés à la distance φ respectivement en avant et en arrière de la lentille.

litude $\mathbf{t}_0(x, y)$ placé immédiatement en d'avant une lentille convergente de distance focale φ comme le montre la figure 5-5*a*. On suppose que l'objet est uniformément éclairé par une onde monochromatique plane d'amplitude A tombant sous l'incidence normale; dans ce cas la perturbation dans le plan tangent d'entrée est:

$$\mathbf{U}_l(x, y) = \mathbf{A}t_0(x, y) \tag{5-11}$$

On peut tenir compte des dimensions finies de l'ouverture de la lentille en lui associant une fonction pupillaire $P(x, y)$ définie par:

$$P(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{à l'intérieur de l'ouverture de la lentille} \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La distribution d'amplitude immédiatement à l'arrière de la lentille devient alors, en utilisant (5-10):

$$\mathbf{U}'_l(x, y) = \mathbf{U}_l(x, y) . P(x, y) \exp\left[-j\frac{k}{2\varphi}(x^2+y^2)\right] \tag{5-12}$$

On n'a pas tenu compte du retard de phase constant qui apparaît dans la formule (5-10) car il ne modifie en aucune façon le résultat.

Pour déterminer la distribution $\mathbf{U}_\varphi(x_\varphi, y_\varphi)$ de l'amplitude du champ dans le plan focal de la lentille, appliquons la formule de diffraction de Fresnel (4-10). Ainsi en faisant dans cette dernière formule: $z = \varphi$, nous obtenons la relation:

$$\mathbf{U}_\varphi(x_\varphi, y_\varphi) = \frac{\exp\left[j\frac{k}{2\varphi}(x_\varphi^2+y_\varphi^2)\right]}{j\lambda\varphi} \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{U}'_l(x, y) \exp\left[j\frac{k}{2\varphi}(x^2+y^2)\right] \times \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda\varphi}(xx_\varphi+yy_\varphi)\right] dx\, dy \tag{5-13}$$

où nous avons laissé de côté le facteur de phase constant. En substituant (5-12) dans (5-13) on constate que les facteurs quadratiques de phase à l'intérieur de l'intégrale se compensent, ce qui donne:

$$\mathbf{U}_\varphi(x_\varphi, y_\varphi) = \frac{\exp\left[j\frac{k}{2\varphi}(x_\varphi^2+y_\varphi^2)\right]}{j\lambda\varphi} \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{U}_l(x, y)\, P(x, y) \times \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda\varphi}(xx_\varphi+yy_\varphi)\right] dx\, dy \tag{5-14}$$

Ainsi la distribution du champ $\mathbf{U}_\varphi$ est proportionnelle à la transformée de Fourier à deux dimensions de la partie du champ incident limitée par l'ouverture de la lentille. Quand les dimensions réelles de l'objet sont inférieures à l'ouverture de la lentille, le

facteur $P(x, y)$ n'intervient plus ce qui donne:

$$\mathbf{U}_\varphi(x_\varphi, y_\varphi) = \frac{A \exp\left[j\frac{k}{2\varphi}(x_\varphi^2+y_\varphi^2)\right]}{j\lambda\varphi} \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{t}_0(x, y) \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda\varphi}(xx_\varphi+yy_\varphi)\right] dx\, dy \tag{5-15}$$

L'amplitude et la phase de la lumière au point de coordonnées (x_φ, y_φ) sont donc fonction de l'amplitude et de la phase de la composante de Fourier de l'objet de fréquences $\left(f_X = \frac{x_\varphi}{\lambda\varphi}, f_Y = \frac{y_\varphi}{\lambda\varphi}\right)$.

Notons que la relation entre l'objet et la distribution en amplitude dans le plan focal n'est pas exactement une transformation de Fourier du fait de la présence du facteur quadratique de phase qui précède l'intégrale. La distribution de phase dans le plan focal n'est pas la même que la distribution de phase dans le spectre de l'objet; la différence entre les deux correspond à une simple courbure de phase. Cependant dans la plupart des cas, on ne s'intéresse qu'à la distribution de *l'intensité* dont la mesure permet de connaître le *spectre de puissance* de l'objet. La distribution de la phase est alors sans importance dans une telle mesure. En effet:

$$I_\varphi(x_\varphi, y_\varphi) = \frac{A^2}{\lambda^2\varphi^2}\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int t_0(x, y) \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda\varphi}(xx_\varphi+yy_\varphi)\right] dx\, dy\right|^2 \tag{5-16}$$

Objet placé avant la lentille. — Considérons à présent le montage plus général de la figure 5-5*b*. L'objet situé à la distance d_0 en avant de la lentille est éclairé par une onde plane d'amplitude A tombant sous l'incidence normale. La transmittance en amplitude de l'objet est encore représentée par t_0. En outre, soit $\mathbf{F}_0(f_X, f_Y)$ le spectre de Fourier de l'onde transmise par l'objet et $\mathbf{F}_l(f_X, f_Y)$ le spectre de Fourier de la l'onde qui tombe sur la lentille; on a alors:

$$\mathbf{F}_0(f_X, f_Y) = \mathcal{F}\{A\mathbf{t}_0\} \qquad \mathbf{F}_l(f_X, f_Y) = \mathcal{F}\{\mathbf{U}_l\}$$

Supposons que les approximations de Fresnel soient valables pour décrire la propagation sur la distance d_0. Grâce à la relation (4-11) on peut alors écrire:

$$\mathbf{F}_l(f_X, f_Y) = \mathbf{F}_0(f_X, f_Y) \exp\left[-j\pi\lambda d_0(f_X^2+f_Y^2)\right] \tag{5-17}$$

si on laisse de côté le retard de phase constant.

Pour le moment, ne tenons pas compte des dimensions finies de l'ouverture. En faisant $P = 1$, l'expression (5-14) peut s'écrire:

$$\mathbf{U}_\varphi(x_\varphi, y_\varphi) = \frac{\exp\left[j\frac{k}{2\varphi}(x_\varphi^2+y_\varphi^2)\right]}{j\lambda\varphi} \mathbf{F}_l\left(\frac{x_\varphi}{\lambda\varphi}, \frac{y_\varphi}{\lambda\varphi}\right) \tag{5-18}$$

Si on substitue (5-17) dans (5-18) nous avons:

$$\mathbf{U}_\varphi(x_\varphi, y_\varphi) = \frac{\exp\left[j\frac{k}{2\varphi}\left(1-\frac{d_0}{\varphi}\right)(x_\varphi^2+y_\varphi^2)\right]}{j\lambda\varphi} \mathbf{F}_0\left(\frac{x_\varphi}{\lambda\varphi}, \frac{y_\varphi}{\lambda\varphi}\right)$$

soit:

$$\mathbf{U}_\varphi(x_\varphi, y_\varphi) = \frac{A \exp\left[j\frac{k}{2\varphi}\left(1-\frac{d_0}{\varphi}\right)(x_\varphi^2+y_\varphi^2)\right]}{j\lambda\varphi} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{t}_0(x_0, y_0) \times \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda\varphi}(x_0x_\varphi+y_0y_\varphi)\right] dx_0\, dy_0 \quad (5\text{-}19)$$

Ainsi l'amplitude et la phase de la vibration lumineuse au point de coordonnées (x_φ, y_φ) sont encore fonction de l'amplitude et de la phase du spectre de l'objet au point de fréquences $\left(\frac{x_\varphi}{\lambda\varphi}, \frac{y_\varphi}{\lambda\varphi}\right)$. Remarquons qu'un facteur de phase précède encore l'intégrale mais qu'il s'annule dans le cas très particulier où $d_0 = \varphi$. *On voit ainsi clairement que, si l'objet est placé dans le plan focal objet de la lentille, la «courbure de phase» disparaît pour donner une transformation de Fourier exacte.*

Pour l'instant nous n'avons pas du tout tenu compte des dimensions finies de l'ouverture de la lentille. Pour faire intervenir l'effet de cette ouverture nous utiliserons une approximation de l'optique géométrique. Une telle approximation est bonne si la distance d_0 est suffisamment petite pour que l'objet se trouve dans la région de la diffraction de Fresnel relative à *l'ouverture de la lentille*. Cette condition est satisfaite dans la grande majorité des problèmes qui nous intéressent. On voit sur la figure 5-6 que l'amplitude de la lumière au point de coordonnées (x_φ, y_φ) est due à la contribution de tous les rayons se propageant dans la direction de cosinus directeurs $\left(\alpha \cong \frac{x_\varphi}{\varphi}, \beta \cong \frac{y_\varphi}{\varphi}\right)$. Cependant, seule une partie de ces rayons est collectée par l'ouverture de la lentille. Il est possible de tenir compte des dimensions finies de l'ouverture de la lentille en projetant obliquement cette ouverture sur le plan de l'objet dans la direction définie par le point de coordonnées (x_φ, y_φ) et le centre de la lentille (fig. 5-6). Ici encore l'ouverture de la lentille limite l'étendue effective de l'objet, mais cette fois la partie efficace de $\mathbf{t}_0$ qui détermine $\mathbf{U}_\varphi$ dépend des coordonnées (x_φ, y_φ).

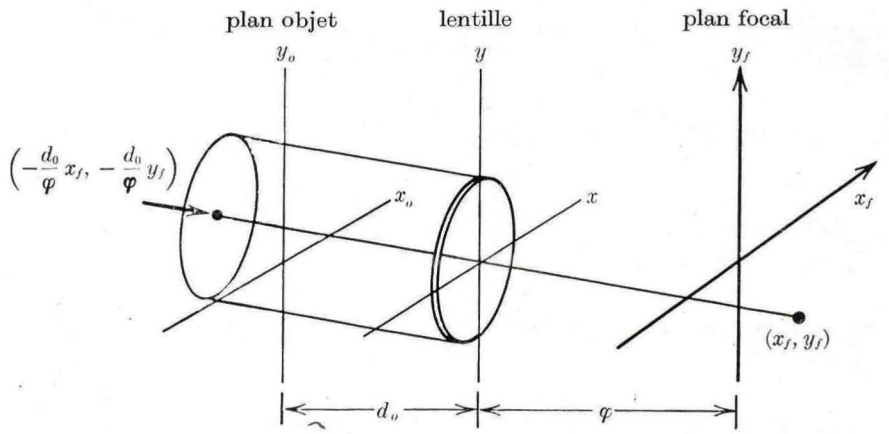


FIG. 5-6. – *Vignetage de l'objet.*

Comme le montre la figure 5-6 on peut trouver la valeur de $\mathbf{U}_\varphi$ au point de coordonnées (x_φ, y_φ) à partir de la transformée de Fourier de la partie de l'objet définie par la fonction pupille P centrée au point de coordonnées $\left(x_0 = -\frac{d_0}{\varphi} x_\varphi,\ y_0 = -\frac{d_0}{\varphi} y_\varphi\right)$.

Ainsi:

$$\mathbf{U}_\varphi(x_\varphi, y_\varphi) = \frac{A \exp\left[j\frac{k}{2\varphi}\left(1-\frac{d_0}{\varphi}\right)(x_\varphi^2+y_\varphi^2)\right]}{j\lambda\varphi} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{t}_0(x_0 y_0)\, P\left(x_0+\frac{d_0}{\varphi}x_\varphi,\ y_0+\frac{d_0}{\varphi}y_\varphi\right)$$

$$\times \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda}(x_0 x_\varphi + y_0 y_\varphi)\right] \mathrm{d}x_0\, \mathrm{d}y_0 \qquad (5\text{-}20)$$

La limitation effective de l'objet par l'ouverture de la lentille est connue sous le nom d'effet de *vignetage*[1]. Notons que le vignetage dans l'espace objet est faible quand l'objet est placé tout près de la lentille et quand l'ouverture de la lentille est beaucoup plus grande que l'objet. Dans la pratique on place souvent l'objet tout contre la lentille afin vue de rendre le vignetage négligeable; cependant, pour simplifier les calculs, il est généralement commode de placer l'objet dans le plan focal objet afin de réaliser exactement la transformation de Fourier.

Objet placé après la lentille. — Pour terminer, considérons le cas d'un objet placé après la lentille comme sur la figure 5-5*c*. L'objet a encore une transmittance t_0 mais il est maintenant situé à une distance d du plan focal image de la lentille. Supposons que la lentille soit éclairée par une onde plane d'amplitude A tombant sous l'incidence normale; l'objet reçoit ainsi une onde sphérique qui converge vers le foyer image de la lentille.

Dans l'approximation de l'optique géométrique, l'amplitude de l'onde sphérique tombant sur l'objet est $-\frac{A\varphi}{d}$; la région de l'objet qui est éclairée est l'intersection du cône de rayons convergents et du plan de l'objet. Si la monture de la lentille est un cercle de diamètre l la région éclairée de l'objet est un cercle de diamètre $\frac{ld}{\varphi}$. L'étendue finie de la zone éclairée, intersection du plan objet et du cône contenant les rayons, peut être représentée par la fonction pupillaire effective $P\left[x_0\frac{\varphi}{d}, y_0\frac{\varphi}{d}\right]$ dans le plan objet. Remarquons que l'on doit associer à la transmittance objet t_0 une ouverture finie; l'ouverture effective dans l'espace objet est ainsi déterminée parla partie commune à l'ouverture réelle de l'objet et à la projection de la fonction pupillaire. Si l'ouverture de l'objet est complètement éclairée, on peut ne pas tenir compte de la fonction pupillaire.

En utilisant une approximation paraxiale de l'onde sphérique qui éclaire l'objet, on

---

[1] En langue anglaise *vignetting*. On dit aussi en français qu'il se forme un "œil de chat". (N.d.T.).

peut écrire l'amplitude du champ transmis par l'objet sous la forme:

$$\mathbf{U}_0(x_0, y_0) = \left\{ \frac{A\varphi}{d} P\left(x_0 \frac{\varphi}{d}, y_0 \frac{\varphi}{d}\right) \exp\left[-j \frac{k}{2d}(x_0^2 + y_0^2)\right] \right\} \mathbf{t}_0(x_0, y_0) \quad (5\text{-}21)$$

En supposant que l'on puisse utiliser les résultats de la diffraction pour passer du plan objet au plan focal, la relation (4-10) permet d'écrire:

$$\mathbf{U}_\varphi(x_\varphi, y_\varphi) = \frac{A \exp\left[j \frac{k}{2d}(x_\varphi^2 + y_\varphi^2)\right]}{j\lambda d} \frac{\varphi}{d} \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{t}_0(x_0 y_0) P\left(x_0 \frac{\varphi}{d}, y_0 \frac{\varphi}{d}\right)$$

$$\times \exp\left[-j \frac{2\pi}{\lambda d}(x_0 x_\varphi + y_0 y_\varphi)\right] \mathrm{d}x_0 \, \mathrm{d}y_0 \quad (5\text{-}22)$$

Ainsi, mis à part le facteur de phase quadratique, la distribution de l'amplitude dans le plan focal est la transformée de Fourier de la partie de l'objet située dans le cône défini par l'ouverture de la lentille et le point de coordonnées (x_φ, y_φ).

Le résultat représenté par l'expression (5-22) a la même allure que celui déjà obtenu quand l'objet était placé tout contre la lentille. Cependant, en plaçant l'objet après la lentille, la méthode gagne en souplesse: l'expérimentateur peut modifier l'échelle de la transformée de Fourier. En augmentant d, on augmente les dimensions de la transformée jusqu'au moment où le cliché vient contre la lentille (c'est-à-dire lorsque $d = \varphi$). En diminuant d on réduit les dimensions de la transformée. Cette propriété peut être très utile dans les applications au filtrage spatial (voir chap. 7) où l'on apprécie souvent la possibilité de modifier l'échelle de la transformée.

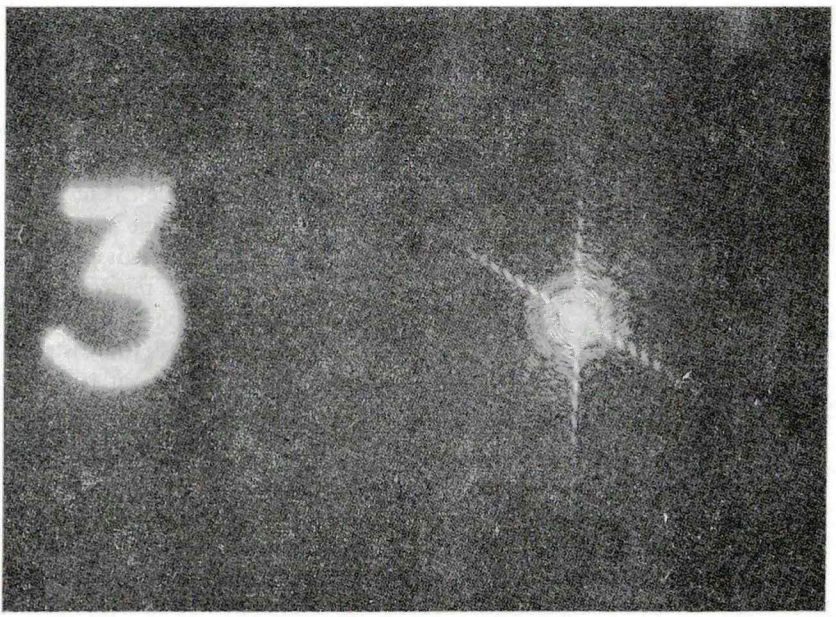


FIG. 5-7. — *Le spectre de Fourier du chiffre «3» obtenu par voie optique.*

Pour terminer, illustrons par un exemple caractéristique le genre d'analyse de Fourier bidimensionnelle que l'on peut très facilement réaliser grâce à l'optique. La figure 5-7 montre à gauche un caractère transparent «3» qu'on place devant une lentille convergente et qu'on éclaire en lumière cohérente; on obtient alors dans le plan focal image le spectre de ce caractère représenté à droite où l'on remarque les composantes de hautes fréquences introduites par les parties rectilignes du caractère.

5-3. — FORMATION DES IMAGES EN ÉCLAIRAGE MONOCHROMATIQUE

La propriété la plus familière des lentilles est certainement leur aptitude à former des images. Si on place un objet devant une lentille et si on l'éclaire, dans certaines conditions il apparaît alors, dans un second plan, une distribution d'intensité lumineuse qui ressemble étroitement à l'objet. Cette distribution en intensité est appelée *image* de l'objet. L'image peut être *réelle* en ce sens qu'une distribution de l'intensité apparaît effectivement dans un plan situé derrière la lentille; elle peut aussi être *virtuelle* c'est-à-dire que la lumière semble provenir d'une distribution en intensité dans un autre plan situé en avant de la lentille.

Pour l'instant nous ne considérons la formation de l'image que dans des conditions très particulières. D'abord nous nous limitons à une lentille mince convergente dépourvue d'aberrations qui forme une image réelle. Ensuite, nous ne considérons que le cas d'un éclairage *monochromatique*, ce qui suppose que le système optique est linéaire en amplitude complexe. Ces deux hypothèses seront toutes deux abandonnées au chapitre 6 où le problème de la formation de l'image sera traité d'une manière beaucoup plus générale.

La réponse impulsionnelle d'une lentille convergente. — En nous reportant à la figure 5-8, supposons qu'un objet plan soit placé à une distance d_0 en avant d'une lentille convergente et soit éclairé par une lumière monochromatique. Représentons le champ complexe immédiatement derrière l'objet par $\mathbf{U}_0(x_0, y_0)$. A une distance d_i à l'arrière de la lentille, il apparaît une distribution de champ que nous représentons par $\mathbf{U}_i(x_i, y_i)$. Nous nous proposons de trouver les conditions dans lesquelles la distribution du champ $\mathbf{U}_i$ peut valablement être appelée une image de la distribution de l'objet $\mathbf{U}_0$.

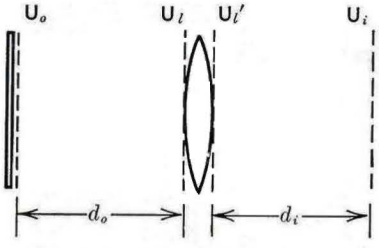


FIG. 5-8. – *Formation de l'image.*

Compte tenu de la linéarité du phénomène de propagation des ondes, nous pouvons dans tous les cas exprimer le champ $\mathbf{U}_i$ par l'intégrale de superposition suivante:

$$\mathbf{U}_i(x_i, y_i) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0)\, \mathbf{U}_0(x_0, y_0)\, dx_0\, dy_0 \qquad (5\text{-}23)$$

où $\mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0)$ est l'amplitude du champ produit au point de coordonnées (x_i, y_i)

par un point source d'amplitude unité situé au point de coordonnées (x_0, y_0) du plan objet. La réponse impulsionnelle traduit ainsi complètement les propiétés optiques du système.

Pour que le système optique produise des images de bonne qualité, il faut que $\mathbf{U}_i$ ressemble le plus possible à $\mathbf{U}_0$. Ceci revient à dire que la réponse impulsionnelle doit pouvoir se mettre sous la forme approchée.

$$\mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0) \cong \mathbf{K}\delta(x_i \pm Mx_0, y_i \pm My_0) \tag{5-24}$$

où $\mathbf{K}$ est une constante complexe et où M représente le grandissement du système; les signes + ou − sont introduits pour exprimer l'inversion possible de l'image. Nous appellerons donc «plan image», le plan où la relation (5-24) est vérifiée avec la meilleure approximation.

Pour déterminer $\mathbf{h}$ considérons un objet représenté par une fonction δ (point source) située au point de coordonnées (x_0, y_0). L'onde qui tombe sur la lentille sera alors une onde sphérique qui diverge à partir du point (x_0, y_0). L'approximation paraxiale relative à cette onde s'écrit:

$$\mathbf{U}_l(x, y) = \frac{1}{d_0} \exp\left\{ j \frac{k}{2d_0} [(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2] \right\} \tag{5-25}$$

Après passage à travers la lentille, la distribution du champ devient:

$$\mathbf{U}'_l(x, y) = \mathbf{U}_l(x, y) \cdot P(x, y) \exp\left[-j \frac{k}{2\varphi} (x^2 + y^2) \right] \tag{5-26}$$

Enfin, en utilisant l'expression (4-9) de la diffraction de Fresnel pour traduire la propagation entre la lentille et le plan image, nous avons:

$$\mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda d_i} \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}'_l(x, y) \exp\left\{ \frac{jk}{2d_i} [(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2] \right\} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \tag{5-27}$$

où l'on a omis les facteurs de phase constants.
En combinant (5-25), (5-26) et (5-27) on obtient:

$$\mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0) = \frac{1}{j\lambda d_0 d_i} \exp\left[j \frac{k}{2d_i} (x_i^2 + y_i^2) \right] \times \exp\left[j \frac{k}{2d_0} (x_0^2 + y_0^2) \right]$$

$$\iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \exp\left[j \frac{k}{2} \left(\frac{1}{d_0} + \frac{1}{d_i} - \frac{1}{\varphi} \right) (x^2 + y^2) \right]$$

$$\times \exp\left\{ -jk \left[\left(\frac{x_0}{d_0} + \frac{x_i}{d_i} \right) x + \left(\frac{y_0}{d_0} + \frac{y_i}{d_i} \right) y \right] \right\} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \tag{5-28}$$

Les expressions 5-23 et 5-28 donnent ainsi une solution formelle définissant la relation qui existe entre $\mathbf{U}_0$ et $\mathbf{U}_i$. Cependant il est difficile de déterminer les conditions dans lesquelles $\mathbf{U}_i$ peut valablement être appelée l'image de $\mathbf{U}_0$ si on ne fait pas d'autres simplifications.

Elimination des facteurs de phase quadratique: la formule de conjugaison des lentilles. — Les termes les plus gênants dans la réponse impulsionnelle précédente sont ceux qui contiennent les facteurs de phase quadratique. Remarquons que deux de ces termes sont indépendants des coordonnées x et y liées à la lentille. Ce sont:

$$\exp\left[j\frac{k}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)\right] \quad \text{et} \quad \exp\left[j\frac{k}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)\right]$$

Ces termes expriment des courbures de phase dans les plans $x_i\ y_i$ et $x_0\ y_0$. Si on remplaçait ces plans par des surfaces sphériques convenables ces termes disparaîtraient. Cependant, même dans le cas de la formation de l'image entre deux plans, on peut montrer que ces deux termes sont sans importance.

Pour éliminer le facteur $\exp\left[j\frac{k}{2d_i}(x_i^2+y_i^2)\right]$, remarquons que dans la grande majorité des cas qui nous intéressent c'est la distribution lumineuse derrière la lentille qui constitue la grandeur de sortie du système. Cette distribution est par conséquent directement reçue par un détecteur qui ne répond qu'à l'intensité lumineuse (par exemple un film photographique). Puisque le terme en question ne modifie que la distribution de la phase de l'onde lumineuse, il n'affecte en aucune façon les résultats de la mesure et par conséquent on peut ne pas en tenir compte.

Malheureusement le cas du facteur de phase $\exp\left[j\frac{k}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)\right]$ ne peut pas être traité aussi facilement car il dépend des variables d'intégration (x_0, y_0) de l'intégrale de superposition[1] (5-23).

Cependant dans la plupart des cas qui nous intéressent, nous pourrons ne pas en tenir compte en faisant le raisonnement suivant. Si le système optique se comporte sensiblement de la façon idéale que traduit l'équation (5-24), l'amplitude de l'onde lumimeuse au points de coordonnées (x_i, y_i) n'est due qu'à la contribution de points situés dans une très petite région de l'espace objet, centrée au point géométrique objet (voir fig. 5-9). Si dans cette petite région la variation de l'argument de

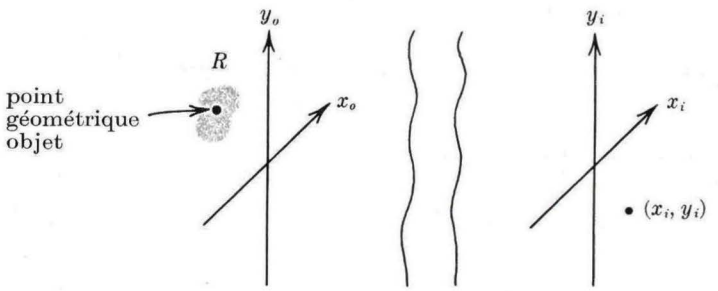


FIG. 5-9. — *Cette figure montre la région pour laquelle h n'est pas nulle au point de coordonnées (x_i, y_i).*

[1] Quand l'éclairage est «incohérent» on peut montrer que le système optique est linéaire en intensité et admet la réponse impulsionnelle $|\mathbf{h}|^2$. Dans ce cas les facteurs de phase peuvent tous deux être abandonnés. Pour plus de détails, voir le chapitre 6.

$\exp\left[j\frac{k}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)\right]$ est inférieure à une fraction de radian nous pouvons alors utiliser l'approximation:

$$\exp\left[j\frac{k}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)\right] \cong \exp\left[j\frac{k}{2d_0}\left(\frac{x_i^2+y_i^2}{M^2}\right)\right] \tag{5-29}$$

Puisque cette dernière exponentielle ne dépend plus de (x_0, y_0) nous pouvons donc ne pas en tenir compte en remarquant encore qu'elle n'affecte pas la mesure de l'intensité dans le plan $x_i y_i$. Pour plus de détails concernant cette approximation et ses conditions de validité, on verra le problème 5-7.

Dans ces conditions, la réponse impulsionnelle se réduit à:

$$h(x_i, y_i; x_0, y_0) \cong \frac{1}{j\lambda d_0 d_i}\iint_{-\infty}^{\infty} P(x, y)\exp\left[j\frac{k}{2}\left(\frac{1}{d_0}+\frac{1}{d_i}-\frac{1}{\varphi}\right)(x^2+y^2)\right]$$
$$\times\exp\left\{-jk\left[\left(\frac{x_0}{d_0}+\frac{x_i}{d_i}\right)x+\left(\frac{y_0}{d_0}+\frac{y_i}{d_i}\right)y\right]\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{5-30}$$

Pour obtenir une dernière simplification, considérons un plan particulier situé derrière la lentille, celui dont la distance d_i à la lentille satisfait à l'équation:

$$\frac{1}{d_0}+\frac{1}{d_i}-\frac{1}{\varphi}=0 \tag{5-31}$$

Cette relation, classique en optique géométrique élémentaire, est connue sous le nom de *loi de conjugaison des lentilles minces*. Elle donne la distance de la lentille au point image en lequel viennent converger les rayons issus d'un point objet. La loi de conjugaison des lentilles minces doit donc être satisfaite pour que la réponse impulsionnelle ressemble à la réponse impulsionnelle idéale. Dans ces conditions la réponse impulsionnelle se réduit à:

$$\mathbf{h}(x_i,y_i;x_0,y_0)\cong\frac{1}{\lambda^2 d_i d_0}\iint_{-\infty}^{\infty}P(x,y)\exp\left\{-jk\left[\left(\frac{x_0}{d_0}+\frac{x_i}{d_i}\right)x+\left(\frac{y_0}{d_0}+\frac{y_i}{d_i}\right)y\right]\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{5-32}$$

Comme le grandissement du système est donné par:

$$M=\frac{d_i}{d_0} \tag{5-33}$$

nous aboutissons à la forme simplifiée suivante:

$$\mathbf{h}(x_i,y_i;x_0,y_0)\cong\frac{1}{j\lambda d_0 d_i}\iint_{-\infty}^{\infty}P(x,y)\exp\left\{-j\frac{2\pi}{\lambda d_i}[(x_i+Mx_0)x+(y_i+My_0)y]\right\}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{5-34}$$

On voit donc que, si la loi de conjugaison est satisfaite, la réponse impulsionnelle représente la figure de diffraction de Fraunhofer de l'ouverture de la lentille, centrée au point du plan image de coordonnées ($x_i = -Mx_0$, $y_i = -My_0$). La présence de la diffraction de Fraunhofer ne doit pas nous surprendre. En choisissant d_i de manière à satisfaire la loi de conjugaison, nous cherchons le plan vers lequel converge l'onde sphérique quittant la lentille. A partir des résultats du problème 4-3, nous pouvions nous attendre à ce que la distribution de lumière autour du point de convergence soit précisément la figure de diffraction de Fraunhofer de l'ouverture de la lentille qui limite l'étendue de cette onde sphérique.

La relation entre l'objet et l'image. — Précisons d'abord la nature de l'image au sens de l'optique géométrique. Pour trouver cette image idéale, nous allons utiliser l'artifice classique qui consiste à faire tendre la longueur d'onde λ vers zéro; les effets de la diffraction deviennent alors négligeables. Grâce au changement de variables $u_x = \dfrac{x}{\lambda d_i}$ et $u_y = \dfrac{y}{\lambda d_i}$, la réponse impulsionnelle (5-34) peut s'écrire:

$$\mathbf{h}(x_i,y_i;\, x_0,y_0) \cong -j\lambda M \int_{-\infty}^{\infty}\int P(\lambda d_i u_x,\, \lambda d_i u_y) \exp\{-j2\pi[(x_i+Mx_0)u_x + (y_i+My_0)u_y]\}\, du_x\, du_y \tag{5-36}$$

Lorsque λ tend vers 0, le domaine du plan $u_x u_y$ pour lequel P est égal à l'unité croît indéfiniment, ce qui permet de remplacer P par l'unité, tout en maintenant infinies les limites de l'intégration.
Ainsi:

$$\begin{aligned}\mathbf{h}(x_i,y_i;\, x_0,y_0) &\to -j\lambda M \int_{-\infty}^{\infty}\int \exp\{-j2\pi[(x_i+Mx_0)u_x+(y_i+My_0)u_y]\}\, du_x\, du_y \\ &= -j\lambda M\delta(x_i+Mx_0,\, y_i+My_0) = \frac{-j\lambda}{M}\,\delta\left(\frac{x_i}{M}+x_0,\, \frac{y_i}{M}+y_0\right)\end{aligned} \tag{5-37}$$

En combinant ce résultat à l'intégrale de superposition (5-23), on voit que les distributions d'amplitude de l'objet et de l'image sont reliées par:

$$\mathbf{U}_i(x_i,y_i) = \frac{-j\lambda}{M}\,\mathbf{U}_0\left(-\frac{x_i}{M}, -\frac{y_i}{M}\right) \tag{5-38}$$

Nous en concluons que l'image au sens de l'optique géométrique est une réplique exacte de l'objet, agrandie et inversée dans le plan image.

Naturellement les résultats de l'optique géométrique ne constituent qu'une première approximation. Pour mieux comprendre la relation existant entre l'objet et l'image, il faut tenir compte des effets de la diffraction. Dans ce but revenons à l'expression (5-36) de la réponse impulsionnelle et faisons le changement de variables suivant:

$$x_0' = -Mx_0 \qquad y_0' = -My_0 \tag{5-39}$$

nous trouvons alors pour la réponse impulsionnelle:

$$\mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0) = -j\lambda M \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda\, d_i u_x, \lambda\, d_i u_y) \times \exp\{-j2\pi[(x_i - x_0')u_x + (y_i - y_0')u_y]\}\, du_x\, du_y \tag{5-40}$$

Notons que $\mathbf{h}$ est maintenant *spatialement invariante* puisqu'elle ne dépend que des différences de coordonnées $x_i - x_0'$, $y_i - y_0'$.

En posant: $\mathbf{h}' = \dfrac{-1}{j\lambda M}\mathbf{h}$, l'intégrale de superposition (5-23) devient:

$$\mathbf{U}_i(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}'(x_i - x_0', y_i - y_0') \left[\frac{-j\lambda}{M}\, \mathbf{U}_0\left(-\frac{x_0'}{M}, -\frac{y_0'}{M}\right)\right] dx_0'\, dy_0' \tag{5-42}$$

$\mathbf{U}_i(x_i, y_i)$ apparaît comme la convolution de la réponse impulsionnelle $\mathbf{h}$ et de l'image au sens de l'optique géométrique. Pour des raisons de commodité, définissons une nouvelle fonction $\mathbf{U}_g$ qui représente l'image, au sens de l'optique géométrique, par:

$$\mathbf{U}_g(x_i y_i) = \frac{1}{M}\, \mathbf{U}_0\left(-\frac{x_i}{M}, -\frac{y_i}{M}\right) \tag{5-43}$$

La relation de convolution (5-42) peut alors s'écrire sous la forme condensée:

$$\mathbf{U}_i(x_i, y_i) = \mathbf{h}'(x_i, y_i) * \mathbf{U}_g(x_i, y_i) \tag{5-44}$$

dans laquelle

$$\mathbf{h}'(x_i, y_i) = \iint_{-\infty}^{\infty} P(\lambda\, d_i u_x, \lambda\, d_i u_y) \exp[-j2\pi(x_i u_x + y_i u_y)]\, du_x\, du_y \tag{5-45}$$

Les relations (5-44) et (5-45) constituent les résultats définitifs de cette analyse. Elles expriment que lorsqu'on tient compte des effets de la diffraction, l'image n'est plus une réplique parfaite de l'objet. En réalité l'image obtenue est plutôt une version atténuée de l'objet du fait de l'étendue finie de la réponse impulsionnelle $\mathbf{h}'$. Cette atténuation peut affecter fortement les détails les plus fins de l'objet, diminuant ainsi la fidélité de l'image résultante. On observe le même phénomène lorsqu'on applique un signal à un circuit électrique linéaire. Si la durée de la réponse impulsionnelle du circuit est grande devant «le temps de fluctuation» du signal d'entrée, le circuit atténuera ce signal et ses variations ne seront pas reproduites à la sortie.

Dans le cas de circuits électriques invariant dans le temps, on décrit plus commodément la perte de fidélité dans la transmission du signal en se plaçant dans le domaine des fréquences. Si le signal d'entrée contient des composantes dont les fréquences sont trop grandes pour que la fonction de transfert du circuit les laisse passer, le signal ne sera pas bien reproduit à la sortie. Le grand intérêt que présentent en électricité les concepts de l'analyse des fréquences suggère d'utiliser des concepts semblables dans l'étude des systèmes optiques. L'application aux systèmes optiques du concept de filtrage est en fait un sujet très important qui va constituer le chapitre suivant.

PROBLÈMES

5-1. Montrer que les distances focales des lentilles biconvexes, plan-convexes et des ménisques convergents sont toujours positives, tandis que les distances focales des lentilles biconcaves, plan-concaves et des ménisques divergents sont toujours négatives.

5-2. *a)* Trouver une approximation paraxiale de la transformation de phase introduite par une lentille constituée par la portion de cylindre représentée sur la figure P 5-2.

b) Quel est l'effet d'une telle lentille sur une onde plane se propageant le long de l'axe de la lentille?

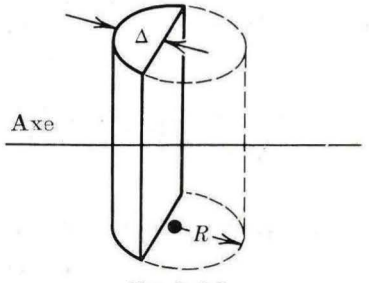


FIG. P 5-2.

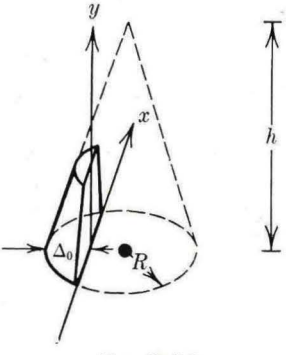


FIG. P 5-3.

5-3. Considérons une lentille constituée par la portion de cône représentée sur la figure P 5-3.

a) Montrer que l'expression

$$\mathbf{t}_l(x, y) = \exp\left\{jk\left[n\Delta_0 - \frac{(n-1)Ry}{h} - \frac{x^2}{2f(y)}\right]\right\}$$

où

$$f(y) = \frac{R(1-y/h)}{n-1}$$

représente une approximation paraxiale de la transformation de phase introduite par une telle lentille considérée comme une lentille mince.

b) Quel est l'effet de cette lentille sur une onde plane se propageant perpendiculairement au plan xy?

5-4. Une fonction objet U_0, limitée par une ouverture circulaire de diamètre l, est placée dans le plan focal objet d'une lentille convergente ayant une ouverture circulaire de diamètre L. On mesure la distribution d'intensité dans le plan focal image de la lentille. On suppose $L > l$.

a) Trouver une expression de la fréquence spatiale maximale pour laquelle l'intensité mesurée est égale au carré du module du spectre de Fourier de l'objet.

b) Calculer la valeur numérique de cette fréquence (en mm^{-1}) lorsque: $L = 4$ cm, $l = 2$ cm, $\varphi = 50$ cm (φ étant la distance focale de la lentille) et $\lambda = 6 \cdot 10^{-7}$ mètre.

c) Au-delà de quelle fréquence l'intensité mesurée dans le plan spectral s'annule-t-elle? On suppose que l'objet peut avoir des composantes de Fourier non nulles de fréquences plus élevée que cette fréquence limite.

5-5. La transmittance en amplitude d'un écran diffractant à symétrie circulaire à la forme suivante:

$$t(r) = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos \alpha r^2\right) \operatorname{circ}\left(\frac{r}{l}\right)$$

a) Dans quelle mesure cet écran agit-il comme une lentille?

b) Donner une expression de la distance focale de cet écran.

c) Quelles caractéristiques pourraient limiter sérieusement l'emploi de cet écran comme élément de formation des images, en particulier dans le cas d'objets polychromatiques?

5-6. Un ensemble de fonctions objet unidimensionnelles peut être représenté par $U_0(x, y_k)$ où $y_1, y_2 \ldots y_k \ldots y_N$ sont N valeurs données de la coordonnée y_k. On veut réaliser une transformation de Fourier de ces N fonctions dans la direction de l'axe des x, ce qui donnera l'ensemble de transformées:

$$\mathbf{G}_0(f_X, y_K) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{U}_0(x, y_K) \exp(-j\,2\pi f_X x)\,dx$$

En négligeant le fait que les dimensions des ouvertures de la lentille et de l'objet sont finies, utiliser les propriétés des lentilles relatives à la transformation de Fourier et à la formation des images étudiées au cours de ce chapitre, pour montrer que ceci peut être réalisé grâce à:

a) deux lentilles cylindriques de distances focales différentes;

ou *b)* une lentille cylindrique et une lentille sphérique de même distance focale.
Simplification. – Il suffit d'évaluer $|G_0|^2$, si bien que les termes de phase n'interviennent pas.

5-7. En utilisant l'approximation de l'équation (5-29):

a) Calculer à quelle distance r de l'origine dans le plan objet le facteur $\exp\left[j\frac{k}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)\right]$ représente une variation de phase de π par rapport à l'origine.

b) L'ouverture étant une fonction à symétrie circulaire limitée par un cercle de rayon α, calculer le rayon (dans le plan objet) pour lequel la fonction h présente son premier zéro; on supposera que le point d'observation dans le plan image est situé à l'origine (cf. fig. 5-9).

c) A partir de ces résultats, trouver une relation entre α, λ et d_0 qui permette de ne pas tenir compte du facteur de phase $\exp\left[j\frac{k}{2d_0}(x_0^2+y_0^2)\right]$ en supposant toujours que l'observation se fait au voisinage de l'axe.

5-8. Une onde plane, monochromatique, d'amplitude unité, tombe sous l'incidence normale sur une lentille convergente de 5 cm de diamètre et de 2 mètres de distance focale. A un mètre à l'arrière de cette lentille, et centré sur l'axe de la lentille, on place un objet dont la transmittance en amplitude est:

$$t(x_0, y_0) = \frac{1}{2}(1+\cos 2\pi f_0 x_0)\,\mathrm{rect}\left(\frac{x_0}{L}\right)\mathrm{rect}\left(\frac{y_0}{L}\right)$$

En prenant $L = 1$ cm et $f_0 = 100$ périodes/mm, déterminer la distribution d'intensité le long de l'axe f_x du plan focal, en indiquant les valeurs numériques des distances entre les composantes diffractées et de la largeur (entre les premiers zéros) de chacune des composantes.

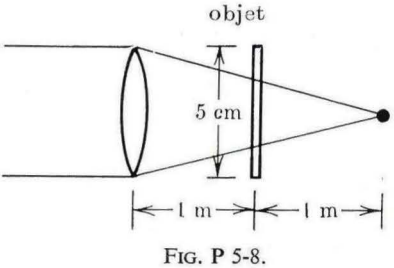


FIG. P 5-8.

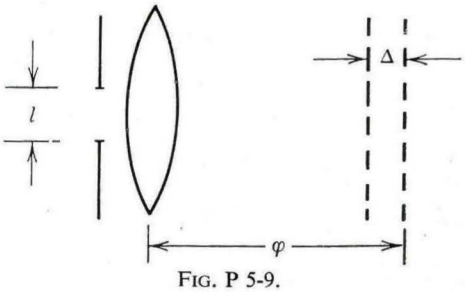


FIG. P 5-9.

5-9. Une onde plane, monochromatique, d'amplitude unité, tombe sous l'incidence normale sur un objet dont la dimension linéaire maximale est l, placé immédiatement avant une lentille convergente de plus grande ouverture et de distance focale φ. A cause d'une erreur de positionnement, la distribution d'intensité est mesurée dans un plan situé à la distance $f-\Delta$ de la lentille. Quelle valeur maximale peut prendre Δ si l'on veut que la distribution d'intensité mesurée représente avec précision le diagramme de diffraction de Fraunhofer de l'objet?

5-10. Un écran diffractant dont la transmittance en amplitude est donnée par:

$$t(r) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,\mathrm{sgn}\,[\cos(\alpha r^2)]\right] \mathrm{circ}\left(\frac{r}{l}\right)$$

est éclairé sous l'incidence normale, par une onde plane monochromatique d'amplitude unité.

Montrer que cet écran se comporte comme une lentille à distances focales multiples. Préciser la valeur de ces distances focales et l'énergie relative concentrée au foyer de chacun des plans focaux correspondants. Un tel écran diffractant est connu sous le nom de *réseau zoné de Fresnel* (ou de Soret).

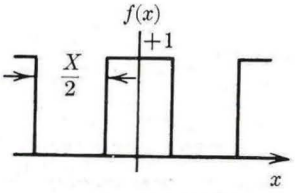


FIG. P 5-10.

Indication. – La fonction schématisée par la figure P 5-10 peut être représentée par la série de Fourier:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin \pi n/2}{\pi n}\right] \exp\left(j\frac{2\pi n x}{X}\right)$$

RÉFÉRENCES

5-1 Rhodes, J.: Analysis and Synthesis of Optical Images, *Am. J. Phys.*, **21**:337 (1953).
5-2 Cutrona, L. J., et coll.: Optical Data Processing and Filtering Systems, *IRE Trans. Inform. Theory*, **IT-6**:386 (1960).
5-3 Preston, K. J.: Use of the Fourier Transformable Properties of Lenses for Signal Spectrum Analysis, in J. T. Tippett et coll. (eds.), *Optical and Electrooptical Information Processing*, M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1965.

CHAPITRE 6

ANALYSE FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES OPTIQUES FORMANT DES IMAGES

En optique les méthodes de l'analyse fréquentielle et de la théorie des systèmes linéaires n'ont joué de rôle important que pendant une période relativement courte. Néanmoins pendant cette brève période, ces méthodes ont été si largement employées et se sont montrées si efficaces qu'elles occupent désormais une place essentielle dans la théorie des systèmes optiques.

La prise de conscience de l'utilité des méthodes de Fourier dans l'analyse des systèmes optiques se fit de manière plutôt spontanée vers la fin des années 30, lorsqu'un certain nombre de chercheurs commençèrent à recommander l'usage de mires sinusoïdales pour évaluer les performances des systèmes. L'impulsion initiale fut donnée en grande partie par un chercheur français, P. M. Duffieux, dont les travaux de recherche aboutirent en 1946 à la publication d'un ouvrage sur l'utilisation des méthodes de Fourier en optique (réf. 6-1). Malheureusement ce livre qui n'a jamais été traduit en anglais, n'a pas été largement diffusé. Aux Etats-Unis, c'est un ingénieur électricien, Otto Schade, qui montra l'intérêt de ces méthodes en employant avec beaucoup d'efficacité les techniques de la théorie des systèmes linéaires et de la théorie des communications pour l'étude et l'amélioration des lentilles des caméras de télévision (réf. 6-2). Cependant, les fondements de l'optique de Fourier existaient bien avant 1940, notamment dans les travaux d'Ernst Abbe (1840-1905) et de Lord Rayleigh (1842-1919).

Dans ce chapitre, nous allons étudier le rôle que joue l'analyse de Fourier dans la théorie des images cohérentes et incohérentes. Bien qu'historiquement le cas de l'éclairage incohérent ait été le plus important, l'éclairage cohérent a néanmoins toujours joué un grand rôle en microscopie et son importance s'est accrue depuis l'apparition du laser.

Pour une étude plus détaillée des divers aspects du sujet que nous allons traiter, le lecteur pourra consulter les ouvrages de O'Neill (réf. 6-3), Françon (réf. 6-4), Linfoot (réf. 6-5) et Stroke (réf. 6-6).

6-1. — ÉTUDE GÉNÉRALE DES SYSTÈMES FORMANT DES IMAGES

Au chapitre précédent nous avons étudié les propriétés, relatives à la formation des images, d'une seule lentille mince convergente dans le cas particulier d'un éclairage monochromatique. Dans ce chapitre, nous commencerons par étendre les résultats déjà obtenus à des systèmes de lentilles plus généraux, puis nous abandonnerons l'hypothèse d'un éclairage monochromatique; nous établirons alors des résultats relatifs à la lumière «quasi-monochromatique» dans les cas où elle est spatialement cohérente et spatialement incohérente.

Schéma très général. — Considérons un système optique composé non pas d'une seule lentille, mais de plusieurs lentilles, certaines pouvant être convergentes et d'autres divergentes. Ces lentilles ne sont pas nécessairement «minces» au sens du chapitre précédent. Nous supposerons cependant que l'image finale formée par le système est *réelle*; cela ne constitue pas vraiment une restriction car même lorsqu'on observe une image virtuelle, elle est transformée en image réelle par la «lentille de l'œil». Dans ce dernier cas il nous faudrait alors inclure dans notre système l'œil comme dernier élément.

Pour exprimer les propriétés d'un système de lentilles, adoptons le point de vue qui consiste à rassembler dans une «boîte noire» tous les éléments qui contribuent à la formation de l'image et à traduire toutes les propriétés caractéristiques du système par celles des «*éléments terminaux*» de ce système.

Si on se reporte à la figure 6-1, les «éléments terminaux» de cette «boîte noire» sont constitués par la pupille d'entrée qui est une ouverture finie (effective ou matérielle) à travers laquelle la lumière doit passer pour atteindre les éléments optiques et par la pupille de sortie (pouvant être aussi effective ou matérielle) qui est une ouverture finie à travers laquelle la lumière doit passer lorsqu'elle quitte les éléments optiques pour aller dans le plan image. On suppose habituellement que le passage de la lumière entre les plans d'entrée et de sortie peut être convenablement décrit par l'optique géométrique. On détermine donc ces deux pupilles en formant les images géométriques du plus petit diaphragme du système, respectivement à travers les éléments optiques qui

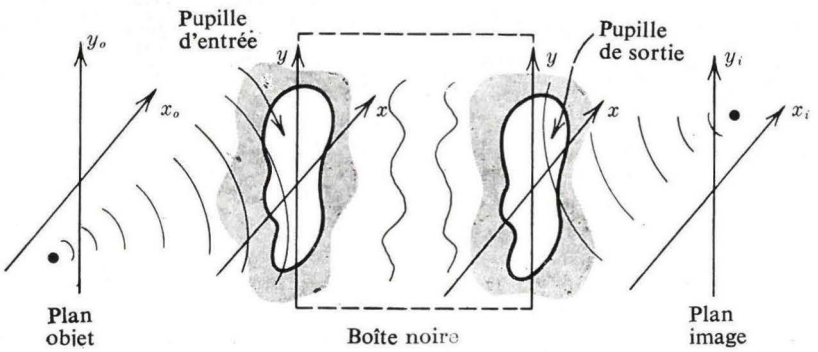


FIG. 6-1. — *Schéma très général d'un système formant des images.*

précèdent ce diaphragme et ceux qui le suivent. Les dimensions de ces pupilles peuvent être plus petites que les dimensions physiques des ouvertures existant dans les deux plans car elles peuvent correspondre aux images d'une ouverture plus petite qui existe quelque part à l'intérieur du système. Remarquons qu'avec ces définitions, la pupille d'entrée et la pupille de sortie sont conjuguées l'une de l'autre.

On dit qu'un système optique est *limité par la diffraction* si une onde sphérique divergente provenant d'un point source objet quelconque est transformée par le système en une nouvelle onde, elle aussi parfaitement sphérique, qui converge en un point géométrique du plan image. Ainsi la propriété «terminale» d'un système de lentilles limité par la diffraction est de transformer une onde sphérique divergente tombant sur la pupille d'entrée en une onde sphérique qui converge au niveau de la pupille de sortie. Pour tout système formant une image réelle, cette propriété ne sera satisfaite, dans le meilleur des cas, que pour une région finie du plan objet. Si l'objet étudié est tout entier contenu dans cette région, on peut considérer que le système est limité par la diffraction.

Dans le cas d'un point source objet, la surface d'onde quittant la pupille de sortie s'écarte de façon sensible de la forme sphérique parfaite; on dit alors que le système optique possède des *aberrations*. Les aberrations seront étudiées plus en détail dans le paragraphe 6-4 où l'on montrera qu'elles conduisent à des imperfections dans la réponse en fréquence spatiale du système optique.

Les effets de la diffraction. — Puisque l'optique géométrique permet de décrire convenablement le passage de la lumière de la pupille d'entrée à la pupille de sortie, les effets de la diffraction n'interviennent qu'au cours de la propagation de la lumière de l'objet à la pupille d'entrée et de la pupille de sortie à l'image. Il est en fait possible d'associer *tous* ces effets à une *seule* de ces deux parties du trajet de la lumière. Les deux points de vue qui consistent à considérer que la résolution de l'image est limitée soit par l'étendue finie de la pupille d'entrée, soit par l'étendue finie de la pupille de sortie, sont absolument équivalents. La raison essentielle de cette équivalence se trouve dans le fait qu'une pupille est tout simplement l'image géométrique de l'autre pupille.

Le premier point de vue fut adopté pour la première fois par Ernst Abbe en 1873 (réf. 6-7). Selon la théorie de Abbe, seule une partie des composantes spatiales d'un objet passe à l'intérieur de la pupille d'entrée à cause de l'étendue finie de celle-ci. Les composantes qui sont arrêtées par la pupille sont précisémment les composantes de haute fréquence de l'objet. La figure 6-2 illustre ce point de vue dans le cas où l'objet est un simple réseau et où le système optique est constitué par une seule lentille convergente.

Le second point de vue absolument équivalent selon lequel les effets de la diffraction résultent des dimensions finies de la *pupille de sortie* fut donné par Lord Rayleigh en 1896 (réf. 6-8). Comme au paragraphe 5-3 nous adopterons ici encore ce point de vue.

Représentons à nouveau l'amplitude[1] dans le plan image par une intégrale de

---

[1] Nous avons supposé l'éclairage monochromatique mais cette hypothèse sera abandonnée dans le paragraphe suivant.

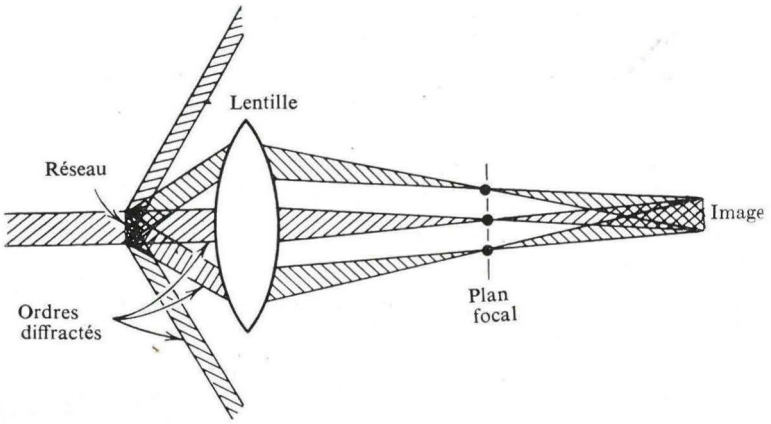


FIG. 6-2. – *Théorie de Abbe de la formation de l'image.*

superposition:

$$\mathbf{U}_i(x_i, y_i) = \int\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0)\, \mathbf{U}_0(x_0, y_0)\, dx_0\, dy_0 \tag{6-1}$$

où **h** est l'amplitude de la réponse du système, en un point du plan image de coordonnées (x_i, y_i), lorsque l'objet est un point source de coordonnées (x_0, y_0). En l'absence d'aberration, la réponse **h** est due à une onde sphérique d'étendue limitée qui converge à partir de la pupille de sortie vers un point géométrique image de coordonnées $(x_i = Mx_0,\ y_i = My_0)$. Dans le cas général, le grandissement M peut être négatif ou positif selon que l'image est ou non renversée.

On déduit du résultat du problème 4-3 et des discussions du paragraphe 5-3 que la distribution d'amplitude lumineuse autour du point géométrique image est tout simplement la figure de diffraction de Fraunhofer de la pupille de sortie centrée au point de coordonnées (Mx_0, My_0). Par suite:

$$\mathbf{h}(x_i, y_i; x_0, y_0) = \mathbf{K} \int\int_{-\infty}^{\infty} P(x, y) \exp\left\{-j\frac{2\pi}{\lambda d_i}[(x_i - Mx_0)x + (y_i - My_0)y]\right\} dx\, dy \tag{6-2}$$

où **K** est une constante complexe et où la fonction pupillaire P est égale à l'unité à l'intérieur de la pupille et à zéro à l'extérieur. En écrivant cette expression, nous n'avons pas tenu compte, comme au paragraphe 5-3, des facteurs de phase quadratique constants. En faisant les changements de variables

$$u_x = \frac{x}{\lambda d_i} \qquad u_y = \frac{y}{\lambda d_i} \qquad x_0' = Mx_0 \qquad y_0' = My_0$$

nous obtenons:

$$\mathbf{h}(x_i - x_0', y_i - y_0') = \mathbf{K}\lambda^2 d_i^2 \int\int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda\, d_i u_x, \lambda\, d_i u_y) \times \exp\{-j\,2\pi[(x_i - x_0')u_x + (y_i - y_0')u_y]\}\, du_x\, du_y \tag{6-3}$$

Pour terminer, si on pose:

$$\hat{\mathbf{h}} = \frac{1}{\mathbf{K}\lambda^2 d_i^2}\,\mathbf{h} \quad \text{et} \quad \mathbf{U}_g(x_0', y_0') = \mathbf{K}\,\frac{\lambda^2 d_i^2}{M^2}\,\mathbf{U}_0\left(\frac{x_0'}{M}, \frac{y_0'}{M}\right)$$

l'intégrale de superposition (6-1) devient:

$$\mathbf{U}_i(x_i, y_i) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \hat{\mathbf{h}}(x_i - x_0', y_i - y_0')\,\mathbf{U}_g(x_0', y_0')\,\mathrm{d}x_0'\,\mathrm{d}y_0' \tag{6-4}$$

où $\mathbf{U}_g$ est l'image idéale prévue par l'optique géométrique et où

$$\hat{\mathbf{h}}(x_i, y_i) = \int_{-\infty}^{\infty}\int P(\lambda\, d_i u_x, \lambda\, d_i u_y)\,\exp\left[-j2\pi(x_i u_x + y_i u_y)\right]\,\mathrm{d}u_x\,\mathrm{d}u_y \tag{6-5}$$

Ainsi, dans le cas général nous pouvons encore considérer l'image comme une convolution de l'image prévue par l'optique géométrique et d'une réponse impulsionnelle déterminée par la pupille de sortie du système.

Eclairage non-monochromatique: cas de la lumière cohérente et de la lumière incohérente. — Jusqu'à présent, nous avons toujours supposé que l'éclairage était rigoureusement monochromatique. Cette hypothèse est beaucoup trop restrictive car l'éclairage produit par des sources réelles, y compris les lasers, n'est jamais parfaitement monochromatique. La nature statistique des variations temporelles de l'amplitude et de la phase de l'éclairage peut en fait influencer fortement le comportement d'un système optique. Nous allons donc faire ici une digression pour étudier les effets très importants qui apparaissent lorsque la lumière n'est pas monochromatique.

Pour traiter ce sujet de façon pleinement satisfaisante, il serait souhaitable de faire une assez longue étude de la *théorie de la cohérence partielle*. Cependant ici une telle étude n'est pas indispensable. Aussi adopterons-nous deux points de vue, l'un entièrement intuitif et le second plus rigoureux mais pas très général. Le lecteur intéressé par une étude plus complète consultera l'ouvrage de Beran et Parrent (réf. 6-9).

Dans le cas d'un éclairage monochromatique, il était commode de représenter l'onde lumineuse par l'amplitude complexe $\mathbf{U}$ fonction des coordonnées spatiales. Lorsque l'éclairage n'est pas monochromatique, on peut généraliser cette méthode en représentant les ondes par des amplitudes complexes *qui varient dans le temps*; ces amplitudes dépendent ainsi à la fois des coordonnées spatiales et du temps. Quand l'éclairage est quasi-monochromatique (c'est-à-dire lorsqu'il possède une bande de fréquence étroite) il est facile d'identifier l'amplitude et la phase de l'amplitude complexe fonction du temps à l'enveloppe de l'onde optique et à sa phase. On peut cependant généraliser le concept d'amplitude complexe variant dans le temps pour l'appliquer aux ondes qui ne sont pas quasi-monochromatiques [voir par exemple la référence 6-9, chapitre 2].

Etudions la nature de la lumière transmise ou réfléchie par un objet éclairé par une onde non-monochromatique. Les variations dans le temps de l'amplitude complexe étant de nature statistique, seuls des concepts statistiques permettent de décrire le champ de façon satisfaisante. Comme nous l'avons déjà vu, chaque point objet

donne une réponse impulsionnelle dans le plan image. Si l'amplitude et la phase de l'onde en un point du plan objet varient avec le temps de façon aléatoire, l'amplitude et la phase de la réponse impulsionnelle dans le plan image varient de la même façon aléatoire. Ainsi, les relations statistiques entre les amplitudes complexes en chaque point de l'objet auront une influence sur les relations statistiques entre les réponses impulsionnelles correspondantes dans le plan image. Ces relations statistiques affectent notablement le résultat de l'opération de moyenne dans le temps qui permet d'obtenir finalement la distribution en intensité de l'image.

Nous ne considèrerons ici que deux types d'éclairage. Le premier est tel que les amplitudes complexes de tous les points objet varient en phase; deux points de l'objet dont les phases absolues varient dans le temps de la même façon peuvent ainsi avoir une différence de phase bien déterminée. Un tel éclairage est dit *spatialement cohérent*. Le second type d'éclairage a la propriété inverse: les amplitudes complexes de tous les points du plan objet varient de façon statistiquement indépendante, c'est-à-dire sans aucune relation entre elles. Cet éclairage est dit *spatialement incohérent*. Dans la suite nous qualifierons ces types d'éclairage simplement de *cohérent* et d'*incohérent*. L'éclairage est cohérent quand la lumière provient d'une source ponctuelle[1]. L'exemple le plus répandu d'une telle source de lumière est le laser, quoique des sources plus classiques (par exemple la lampe à arc au zirconium) puissent aussi donner de la lumière cohérente, à condition que la lumière passe d'abord à travers un trou très petit; dans ce cas l'intensité est cependant bien plus faible. On obtient de la lumière incohérente à partir de sources diffuses ou étendues telles que les lampes à décharge dans les gaz[2].

Quand l'objet est éclairé en lumière cohérente, les différentes réponses impulsionnelles dans le plan image varient au cours du temps en restant en phase; par conséquent ce sont les amplitudes complexes que l'on doit ajouter. Un système optique cohérent est donc linéaire pour les amplitudes complexes. Les résultats de notre étude concernant le cas de l'éclairage monochromatique peuvent donc s'appliquer directement, étant entendu que l'amplitude complexe **U** qui décrit les amplitudes et les phases *relatives* de l'onde lumineuse varie maintenant dans le temps.

Quand l'objet est éclairé en lumière incohérente, les réponses impulsionnelles dans le plan image varient de façon statistiquement indépendante. Ce sont donc les puissances ou les intensités que l'on doit ajouter. Comme l'intensité de toute réponse impulsionnelle donnée est proportionnelle à l'intensité de la vibration émise par le point objet qui lui a donné naissance, il en résulte qu'un système incohérent est décrit par une transformation linéaire *d'intensité*; alors la réponse impulsionnelle de la distribution en intensité est proportionnelle au carré du module de la réponse impulsionnelle obtenue en éclairage cohérent.

---

[1] Ceci est une condition suffisante mais non nécessaire. Par exemple, si la lumière provenant d'un point source traverse un diffuseur stationnaire, la phase relative de la lumière en deux points quelconques situés derrière le diffuseur reste indépendante du temps. Par conséquent, la lumière transmise est encore spatialement cohérente bien qu'elle ne semble plus provenir d'une source ponctuelle.

[2] On peut aussi définir d'une autre manière les notions de cohérence à l'aide de la théorie quantique du champ (voir par exemple les références 6-10 et 6-11) mais ici ces considérations très simples nons suffiront.

Les raisonnements précédents sont tout à fait intuitifs et reposent sur certaines hypothèses et approximations qui n'ont pas été précisées. Nous allons donc entreprendre un examen plus rigoureux du problème. Pour commencer, remarquons que dans le cas d'une onde monochromatique, nous avons obtenu la représentation de la vibration en supprimant la composante de fréquence positive de l'onde sinusoïdale et en attribuant une amplitude complexe à la composante de fréquence négative. Pour généraliser ce concept au cas d'une onde non monochromatique $u(P, t)$, supprimons toutes les composantes de son spectre de Fourier ayant une fréquence positive; cela donne une nouvelle fonction complexe $\mathbf{u}_(P, t)$. Si nous écrivons en outre $\mathbf{u}_(\mathrm{P}, \mathrm{t})$ sous la forme:

$$\mathbf{u}_(P, t) = \mathbf{U}(P, t) \exp(-j 2\pi \bar{\nu} t)$$

$\bar{\nu}$ étant la fréquence moyenne de la perturbation, la fonction complexe $\mathbf{U}(P, t)$ peut alors être considérée comme l'amplitude complexe variant dans le temps de $u(P, t)$.

On renvoie ici le lecteur aux résultats du problème 3-5, à partir desquels on peut voir que l'amplitude complexe $\mathbf{U}(P, t)$ obéit aux mêmes lois de propagation que l'amplitude complexe, indépendante du temps, d'une perturbation monochromatique de fréquence $\bar{\nu}$ pourvu que les deux conditions suivantes soient remplies:

$$\frac{\Delta\nu}{\bar{\nu}} \ll 1 \quad \text{(hypothèse de quasi-monochromaticité)}$$

et

$$\frac{1}{\Delta\nu} \gg \frac{d}{c}$$

où $\Delta\nu$ est la largeur de bande de la perturbation, d la longueur du plus long chemin optique considéré et c la vitesse de la lumière.

Lorsque ces deux conditions sont remplies, on peut utiliser la relation (6-4) pour représenter l'amplitude complexe dans le plan image par la convolution:

$$\mathbf{U}_i(x_i, y_i; t) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \hat{\mathbf{h}}(x_i - x_0', y_i - y_0')\, \mathbf{U}_g(x_0', y_0', t)\, \mathrm{d}x_0', \mathrm{d}y_0' \tag{6-6}$$

où $\mathbf{U}_g$ est l'amplitude complexe de l'image prévue par l'optique géométrique et où $\hat{\mathbf{h}}$ est donnée par la relation (6-5) dans laquelle on a remplacé λ par la longueur d'onde moyenne $\bar{\lambda}$.

En fin de compte, ce qui nous intéresse c'est naturellement *l'intensité* dans le plan image[1]:

$$I_i(x_i, y_i) = \langle \mathbf{U}_i(x_i, y_i; t)\, \mathbf{U}_i^*(x_i, y_i; t) \rangle \tag{6-7}$$

Pour calculer cette quantité substituons (6-6) dans (6-7); en permuttant l'ordre des intégrations et en prenant la moyenne dans le temps, on obtient:

$$I_i(x_i, y_i) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}x_0'\, \mathrm{d}y_0' \int_{-\infty}^{\infty}\int \hat{\mathbf{h}}(x_i - x_0', y_i - y_0')\, \hat{\mathbf{h}}^*(x_i - x_0'', y_i - y_0'')$$
$$\times \langle \mathbf{U}_g(x_0', y_0'; t) \mathbf{U}_g^*(x_0'', y_0''; t) \rangle\, \mathrm{d}x_0'' \mathrm{d}y_0'' \tag{6-8}$$

[1] Ici encore les parenthèses angulaires représentent la moyenne temporelle correspondant à un temps infini.

Comme les propriétés statistiques de $\mathbf{U}_g$ sont identiques à celles de $\mathbf{U}_0$, on voit que la quantité placée entre parenthèses angulaires dépend de la *cohérence spatiale* de l'éclairage de l'objet.

Lorsque l'éclairage est parfaitement *cohérent*, les amplitudes complexes dans le plan objet ne diffèrent que par des constantes complexes. Nous pouvons donc écrire:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_g(x_0', y_0'; t) &= \mathbf{U}_g(x_0', y_0') \frac{\mathbf{U}_g(0, 0; t)}{\langle |\mathbf{U}_g(0, 0; t)|^2 \rangle^{1/2}} \\ \mathbf{U}_g(x_0'', y_0''; t) &= \mathbf{U}_g(x_0'', y_0'') \frac{\mathbf{U}_g(0, 0; t)}{\langle |\mathbf{U}_g(0, 0; t)|^2 \rangle^{1/2}}\end{aligned} \tag{6-9}$$

où $\mathbf{U}_g(x_0', y_0')$ et $\mathbf{U}_g(x_0'', y_0'')$ sont les parties indépendantes du temps des amplitudes complexes $\mathbf{U}_g(x_0', y_0'; t)$ et $\mathbf{U}_g(x_0'', y_0''; t)$, et où $\mathbf{U}_g(0, 0; t)$, amplitude complexe du point situé à l'origine, traduit la variation temporelle commune. Après substitution de ces relations dans (6-8) les intégrations spatiales se séparent, et on trouve:

$$I_i(x_i, y_i) = \left| \int_{-\infty}^{\infty}\int \hat{\mathbf{h}}(x_i - x_0', y_i - y_0')\, \mathbf{U}_g(x_0', y_0')\, \mathrm{d}x_0'\, \mathrm{d}y_0' \right|^2 \tag{6-10}$$

Pour terminer, si $\mathbf{U}_i(x_i, y_i)$ représente la partie spatiale de l'amplitude complexe $\mathbf{U}_i(x_i, y_i; t)$ et si $\mathbf{U}_g(0, 0; t)$ représente sa variation temporelle, on trouve que le système optique utilisé en lumière cohérente est décrit par la convolution:

$$\mathbf{U}_i(x_i y_i) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \hat{\mathbf{h}}(x_i - x_0', y_i - y_0')\, \mathbf{U}_g(x_0', y_0')\, \mathrm{d}x_0'\, \mathrm{d}y_0' \tag{6-11}$$

Nous pouvons donc conclure qu'un système optique est linéaire pour l'*amplitude complexe* si l'objet est éclairé en lumière cohérente.

Quand l'éclairage de l'objet est parfaitement *incohérent* les amplitudes complexes dans le plan objet varient de façon statistiquement indépendante. On peut représenter ce cas idéal d'éclairage parfaitement incohérent par la relation:

$$\langle \mathbf{U}_g(x_0', y_0'; t) \cdot \mathbf{U}_g^*(x_0'', y_0''; t) \rangle = K I_g(x_0', y_0')\, \delta(x_0' - x_0'', y_0' - y_0'') \tag{6-12}$$

où K est une constante réelle. Une telle représentation n'est cependant pas exacte, car on peut montrer qu'elle implique que les seules ondes transmises par l'objet sont des ondes évanescentes. En réalité la distance minimale sur laquelle la cohérence peut exister est de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde (voir réf. 6-9, § 4-4, pour plus de détails). Néanmoins la formule (6-12) est correcte dans la plupart des cas rencontrés dans la pratique. En l'utilisant dans l'expression (6-8) on obtient le résultat:

$$I_i(x_i, y_i) = \int_{-\infty}^{\infty}\int |\hat{\mathbf{h}}(x_i - x_0', y_i - y_0')|^2\, I_g(x_0', y_0')\, \mathrm{d}x_0'\, \mathrm{d}y_0' \tag{6-13}$$

On trouve donc que l'intensité de l'image est une convolution de l'intensité idéale I_g et d'une réponse impulsionnelle $|\hat{\mathbf{h}}|^2$. Nous pouvons conclure que lorsque l'éclairage de l'objet est incohérent le système optique réalise une transformation linéaire de

l'intensité. De plus, la réponse impulsionnelle de cette transformation de l'intensité est tout simplement proportionnelle au carré du module de la réponse impulsionnelle obtenue avec un éclairage cohérent.

6-2. — RÉPONSE FRÉQUENTIELLE D'UN SYSTÈME OPTIQUE LIMITÉ PAR LA DIFFRACTION. CAS DE L'ÉCLAIRAGE COHÉRENT

Nous abordons maintenant la partie du sujet qui constitue l'essentiel de ce chapitre: l'analyse fréquentielle des systèmes formant des images. Pour l'instant limitons-nous aux systèmes éclairés en lumière cohérente. Les systèmes éclairés en lumière incohérente seront traités au paragraphe 6-3.

Comme nous l'avons déjà souligné, un système optique éclairé en lumière cohérente est linéaire pour l'amplitude complexe de l'onde. Ceci entraîne, évidemment, qu'un tel système est fortement non-linéaire en intensité. Lorsque nous serons amenés à appliquer les concepts de l'analyse fréquentielle sous leur forme habituelle, nous devrons les appliquer aux transformations linéaires en *amplitude*.

La fonction de transfert en optique cohérente. — L'analyse des systèmes cohérents nous a permis de donner à la transformation en amplitude une forme spatialement invariante, comme le met en évidence la convolution:

$$\mathbf{U}_i(x_i,y_i)= \int_{-\infty}^{\infty}\int \hat{\mathbf{h}}(x_i-x'_0,\, y_i-y'_0)\, \mathbf{U}_g(x'_0,\, y'_0)\, \mathrm{d}x'_0\, \mathrm{d}y'_0 \tag{6-14}$$

Ceci suppose qu'on puisse appliquer directement le concept de fonction de transfert à ce système. Définissons alors les spectres des fonctions d'entrée et de sortie du système de la manière suivante:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_g(f_X,f_Y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{U}_g(x'_0,\, y'_0)\, \exp\,[-j\,2\pi(f_X x'_0+f_Y y'_0)]\, \mathrm{d}x'_0\, \mathrm{d}y'_0 \\ \mathbf{G}_i(f_X,f_Y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{U}_i(x_i,y_i)\, \exp\,[-j\,2\pi(f_X x_i+f_Y y_i)]\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}y_i \end{aligned} \tag{6-15}$$

En outre, définissons la fonction de transfert par la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle, spatialement invariante:

$$\mathbf{H}(f_X,f_Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \hat{\mathbf{h}}(x_i,y_i)\, \exp\,[-j\,2\pi(f_X,\, x_i+f_Y,\, y_i)\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}y_i \tag{6-16}$$

En appliquant alors le théorème de convolution à (6-14), il en résulte immédiatement que:

$$\mathbf{G}_i(f_X,f_Y) = \mathbf{H}(f_X,f_Y)\cdot\mathbf{G}_g(f_X,f_Y) \tag{6-17}$$

On a ainsi exprimé, au moins formellement, les effets du système optique limité par la diffraction, dans le domaine des fréquences. Dans la suite, la fonction $\mathbf{H}(f_X,\, f_Y)$ sera

appelée *fonction de transfert cohérente*. Il reste maintenant à relier **H** plus directement à une propriété physique du système lui-même.

Pour cela, remarquons que **H** a été définie comme la transformée de Fourier de $\hat{\mathbf{h}}$ (relation 6-16) et que cette dernière fonction est elle-même donnée par une transformation de Fourier (cf. relation 6-5):

$$\hat{\mathbf{h}}(x_i, y_i) = \int\int_{-\infty}^{\infty} P(\lambda d_i u_x, \lambda d_i u_y) \exp\left[-j\,2\pi(x_i u_x + y_i u_y)\right] \mathrm{d}u_x\, \mathrm{d}u_y$$

Nous pouvons donc conclure que pour un système limité par la diffraction:

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y) = \mathcal{F}\{\mathcal{F}\{P(\lambda d_i u_x, \lambda d_i u_y)\}\} = P(-\lambda d_i f_X, -\lambda d_i f_Y) \qquad (6\text{-}18)$$

Cette relation est de la plus haute importance; elle révèle clairement le comportement, dans le domaine des fréquences, des systèmes cohérents limités par la diffraction. Puisque la fonction pupillaire P ne prend que les valeurs 0 et 1, il en est de même de la fonction de transfert cohérente. Ceci implique, évidemment, qu'il existe une bande passante de largeur finie dans le domaine des fréquences à l'intérieur de laquelle le système limité par la diffraction laisse passer, sans distorsion[1] d'amplitude ou de phase, toutes les composantes fréquentielles. A la limite de la bande passante, la réponse en fréquence tombe brutalement à zéro; les composantes dont les fréquences sont en dehors de la bande passante sont donc complètement étouffées.

Pour terminer, remarquons que la fonction de transfert cohérente est proportionnelle à la fonction pupillaire *renversée* comme le montrent les signes moins dans l'argument de P. Nous pouvons éviter cette notation peu commode en définisant dorénavant P dans un système de coordonnées symétrique par rapport à l'origine au lieu de le faire dans le système de coordonnées habituel comme sur la figure 6-1. Dans ces conditions nous pouvons donc écrire:

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y) = P(\lambda\, d_i f_X, \lambda\, d_i f_Y) \qquad (6\text{-}19)$$

Cette distinction n'aura pas d'importance ici, car les problèmes que nous considèrerons sont tous symétriques par rapport aux axes de coordonnées f_X et f_Y.

Exemples de fonctions de transfert cohérentes pour des systèmes limités par la diffraction. — Comme exemples de réponses fréquentielles de systèmes optiques limités par la diffraction et éclairés en lumière cohérente, nous allons calculer les fonctions de transfert cohérentes de deux systèmes, l'un ayant une pupille de sortie carrée (côté l), l'autre une pupille de sortié circulaire (diamètre l). Dans ces deux cas nous avons, respectivement:

$$P(x, y) = \mathrm{rect}\left(\frac{x}{l}\right) \mathrm{rect}\left(\frac{y}{l}\right)$$

$$P(x, y) = \mathrm{circ}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{l/2}\right)$$

---

[1] Notons que ce résultat n'est valable que pour un système dépourvu d'aberration. Comme nous le verrons dans le chapitre 6-4, un système possédant des aberrations présente de la distorsion même à l'intérieur de sa bande passante.

L'expression (6-19) nous donne alors les fonctions de transfert cohérentes correspondantes:

$$\mathbf{H}(f_Y, f_Y) = \text{rect}\left(\frac{\lambda d_i f_X}{l}\right) \text{rect}\left(\frac{\lambda d_i f_Y}{l}\right)$$

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y) = \text{circ}\left(\lambda d_i \frac{\sqrt{f_X^2+f_Y^2}}{l/2}\right)$$

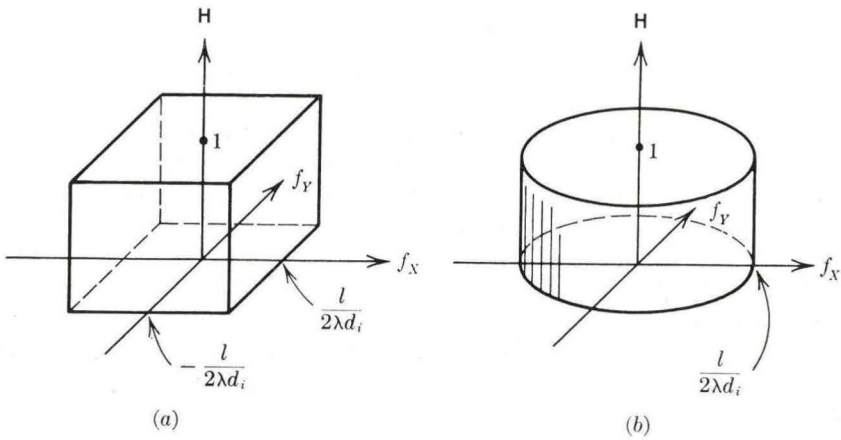


FIG. 6-3. — *Fonctions de transfert cohérentes pour des systèmes limités par la diffraction (a) Cas d'une pupille de sortie carrée (b) Cas d'une pupille de sortie circulaire.*

La figure 6-3 représente ces fonctions. Notons qu'on peut définir dans chacun des cas une fréquence de coupure f_0 par:

$$f_0 = \frac{l}{2\lambda d_i} \tag{6-20}$$

Lorsque la pupille est circulaire, cette fréquence de coupure est la même dans toutes les directions du plan des fréquences, alors que pour une pupille carrée cette fréquence de coupure n'est relative qu'aux axes f_X et f_Y. Pour donner un ordre de grandeur caractéristique de f_0, supposons que $l = 2$ cm, $d_i = 10$ cm et $\lambda = 10^{-4}$ cm. La fréquence de coupure est alors 100 périodes/mm.

6-3. — RÉPONSE FRÉQUENTIELLE D'UN SYSTÈME OPTIQUE LIMITÉ PAR LA DIFFRACTION. CAS DE L'ÉCLAIRAGE INCOHÉRENT

Nous venons de voir qu'il est possible de relier directement et de façon très simple la pupille de sortie et la fonction de transfert cohérente. Quand l'éclairage de l'objet est incohérent, nous allons voir que la fonction de transfert d'un système optique est encore déterminée par la pupille de sortie, mais que la relation est moins simple quoique plus intéressante. La théorie de la formation des images en lumière incohérente

présente en effet certaines propriétés nouvelles qu'on ne trouve pas dans le cas de la lumière cohérente. Nous commencerons par porter notre attention sur les systèmes *limités par la diffraction*; la discussion qui va suivre s'applique cependant à tous les systèmes incohérents, même s'ils présentent des aberrations.

La fonction de transfert optique et sa relation avec la fonction de transfert cohérente. — Nous avons vu que dans les systèmes optiques utilisés en éclairage incohérent *l'intensité* est donnée par l'intégrale de convolution:

$$I_i(x_i y_i) = K \int_{-\infty}^{\infty}\int |\hat{\mathbf{h}}(x_i - x_0', y_i - y_0')|^2 I_g(x_0' y_0')\, \mathrm{d}x_0'\, \mathrm{d}y_0' \tag{6-21}$$

L'analyse fréquentielle de I_i montre qu'on peut considérer que de tels systèmes effectuent des transformations linéaires des distributions d'intensité. Définissons les spectres fréquentiels normalisés de I_g et I_i par

$$\boldsymbol{G}_g(f_X, f_Y) = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int I_g(x_0', y_0') \exp\left[-j2\pi(f_X x_0' + f_Y y_0')\right] \mathrm{d}x_0'\, \mathrm{d}y_0'}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int I_g(x_0' y_0')\, \mathrm{d}x_0'\, \mathrm{d}y_0'} \tag{6-22}$$

$$\boldsymbol{G}_i(f_X, f_Y) = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int I_i(x_i, y_i) \exp\left[-j2\pi(f_X x_i + f_Y y_i)\right] \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}y_i}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int I_i(x_i, y_i)\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}y_i} \tag{6-23}$$

On est amené à normaliser les spectres par la valeur de l'intégrale «aux fréquences nulles» par commodité mathématique, mais aussi pour une raison plus fondamentale. Comme l'intensité est une quantité qui ne peut pas être négative, une distribution en intensité possède toujours une «composante continue» non nulle, c'est-à-dire un fond constant. La qualité visuelle de l'image dépend dans une large mesure du «contraste», c'est-à-dire des intensités relatives des parties de l'image qui contiennent l'information et du fond continu inévitable. Aussi normalise-t-on les spectres par le fond continu.

D'une façon analogue, on peut définir la fonction de transfert normalisée du système par:

$$\boldsymbol{H}(f_X, f_Y) = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int |\hat{\mathbf{h}}(x_i, y_i)|^2 \exp\left[-j2\pi(f_X x_i + f_Y y_i)\right] \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}y_i}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int |\hat{\mathbf{h}}(x_i\ y_i)|^2\, \mathrm{d}x_i\, \mathrm{d}y_i} \tag{6-24}$$

Si on applique le théorème de convolution à la relation (6-21) on obtient alors, dans le domaine des fréquences, la relation:

$$\boldsymbol{G}_i(f_X, f_Y) = \boldsymbol{H}(f_X, f_Y) \cdot \mathbf{G}_g(f_X, f_Y) \tag{6-25}$$

La fonction $\boldsymbol{H}$ est généralement appelée la *fonction de transfert optique* (en abrégé FTO)

Son module $|\boldsymbol{H}|$ est connu sous le nom de *fonction de transfert de modulation* (FTM). Remarquons que $\boldsymbol{H}(f_X, f_Y)$ est tout simplement le facteur de pondération complexe qui, du fait de la traversée du système, affecte la composante de fréquences f_X et f_Y; Ce facteur de pondération est égal à l'unité pour la composante de fréquences nulles.

Puisque les deux définitions de la fonction de transfert cohérente et de la fonction de transfert optique font intervenir la fonction $\hat{\mathbf{h}}$, il existe certainement une relation particulière entre ces deux fonctions. On peut la déterminer aisément grâce au théorème d'autocorrélation du chapitre 2. Comme:

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y) = \mathcal{F}\{\hat{\mathbf{h}}\}$$

et

$$\boldsymbol{H}(f_X, f_Y) = \frac{\mathcal{F}\{|\hat{\mathbf{h}}|^2\}}{\mathcal{F}\{|\hat{\mathbf{h}}|^2\}_{f_X=0,\, f_Y=0}}$$

il en résulte immédiatement que:

$$\boldsymbol{H}(f_X, f_Y) = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{H}(\xi', \eta')\, \mathbf{H}^*(\xi' - f_X, \eta' - f_Y)\, \mathrm{d}\xi'\, \mathrm{d}\eta'}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int |(\xi', \eta')|^2\, \mathrm{d}\xi'\, \mathrm{d}\eta'} \tag{6-26}$$

Le simple changement de variables

$$\xi = \xi' - \frac{f_X}{2} \qquad \eta = \eta' - \frac{f_Y}{2}$$

rend l'expression précédente symétrique:

$$\boldsymbol{H}(f_X, f_Y) = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{H}\left(\xi + \frac{f_X}{2}, \eta + \frac{f_Y}{2}\right) \mathbf{H}^*\left(\xi - \frac{f_X}{2}, \eta - \frac{f_Y}{2}\right) \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{H}|(\xi, \eta)|^2\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta} \tag{6-27}$$

La relation (6-27) servira de lien fondamental entre les systèmes cohérents et incohérents. Notons que ce résultat est valable aussi bien pour les systèmes qui présentent des aberrations que pour ceux qui n'en présentent pas.

Propriétes générales de la FTO. — Il est possible de déduire directement de la relation (6-27) un certain nombre de propriétés très simples et très générales de la fonction de transfert optique. Les propriétés les plus importantes sont les suivantes:

1. $\boldsymbol{H}(0, 0) = 1$
2. $\boldsymbol{H}(-f_X, -f_Y) = \boldsymbol{H}^*(f_X, f_Y)$
3. $|\boldsymbol{H}(f_X, f_Y)| \leqslant |\boldsymbol{H}(0, 0)|$

La propriété 1 s'obtient immédiatement en faisant $f_X = 0$ et $f_Y = 0$ dans (6-27). La

démonstration de la propriété 2 est laissée au soin du lecteur à titre d'exercice; il suffit d'établir que la transformée de Fourier d'une fonction réelle est hermitique.

Il est moins facile de montrer que la valeur prise par la fonction de transfert de modulation pour toutes valeurs des fréquences reste toujours inférieure à sa valeur aux fréquences nulles. Pour démontrer la propriété 3, utilisons *l'inégalité de Schwarz* (réf. 6-12) qu'on peut énoncer comme suit: Si $\mathbf{X}(\xi, \eta)$ et $\mathbf{Y}(\xi, \eta)$ sont deux fonctions quelconques à valeur complexes de (ξ, η), alors:

$$\left|\iint \mathbf{XY}\, d\xi\, d\eta\right|^2 \leqslant \iint |\mathbf{X}|^2\, d\xi\, d\eta \iint |\mathbf{Y}|^2\, d\xi\, d\eta. \tag{6-28}$$

l'égalité étant réalisée si, et seulement si, $\mathbf{Y} = \mathbf{KX}^*$, $\mathbf{K}$ étant une constante complexe. Posant:

$$\mathbf{X}(\xi, \eta) = \mathbf{H}\left(\xi+\frac{f_X}{2}, \eta+\frac{f_Y}{2}\right) \quad \text{et} \quad \mathbf{Y}(\xi, \eta) = \mathbf{H}^*\left(\xi-\frac{f_X}{2}, \eta-\frac{f_Y}{2}\right)$$

nous trouvons:

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{H}\left(\xi+\frac{f_X}{2}, \eta+\frac{f_Y}{2}\right)\mathbf{H}^*\left(\xi-\frac{f_X}{2}, \eta-\frac{f_Y}{2}\right) d\xi\, d\eta\right|^2$$

$$\leqslant \int_{-\infty}^{\infty}\int \left|\mathbf{H}\left(\xi+\frac{f_X}{2}, \eta+\frac{f_Y}{2}\right)\right|^2 d\xi\, d\eta \int_{-\infty}^{\infty}\int \left|\mathbf{H}^*\left(\xi-\frac{f_X}{2}, \eta-\frac{f_Y}{2}\right)\right|^2 d\xi\, d\eta$$

$$= \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int |\mathbf{H}(\xi, \eta)|^2\, d\xi\, d\eta\right]^2$$

En divisant les deux membres de l'inégalité par

$$\left[\int_{-\infty}^{\infty}\int |\mathbf{H}(\xi, \eta)|^2\, d\xi\, d\eta\right]^2$$

on voit que $|H(f_X, f_Y)|$ n'est jamais supérieur à l'unité.

Pour terminer soulignons le fait suivant: bien que la FTO soit toujours égale à l'unité aux fréquences nulles, la valeur absolue de l'intensité du fond continu dans le plan image n'est pas la même que la valeur absolue de l'intensité du fond continu dans le plan objet. En fait, la valeur de l'intensité absolue dans le plan image est toujours plus faible en raison des dimensions finies de la pupille d'entrée du système; cependant cette perte d'intensité n'apparaît pas en raison de la normalisation de la FTO.

La FTO d'un système dépourvu d'aberration. — Tout ce que nous avons dit jusqu'à présent est applicable à tous les systèmes, qu'ils aient ou non des aberrations. Considérons maintenant le cas particulier d'un système incohérent limité par la diffraction. Rappelons que pour le système cohérent nous avons:

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y) = P(\lambda d_i f_X, \lambda d_i f_Y)$$

Pour le système incohérent, il résulte de la relation (6-27) (avec un simple changement de variables) que:

$$\boldsymbol{H}(f_X, f_Y) = \frac{\displaystyle\iint_{-\infty}^{\infty} P\left(\xi + \frac{\lambda d_i f_X}{2}, \eta + \frac{\lambda d_i f_Y}{2}\right) P\left(\xi - \frac{\lambda d_i f_X}{2}, \eta - \frac{\lambda d_i f_Y}{2}\right) \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta}{\displaystyle\iint_{-\infty}^{\infty} P(\xi, \eta)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta} \tag{6-29}$$

On a pu remplacer au dénominateur P^2 par P car la fonction P ne peut prendre que les valeurs 0 ou 1.

L'expression (6-29) de $\boldsymbol{H}$ se prête à une interprétation géométrique extrêmement importante. Le numérateur représente l'aire de la partie commune à deux fonctions pupillaires identiques, l'une centrée au point de coordonnées $\left(\frac{\lambda d_i f_X}{2}, \frac{\lambda d_i f_Y}{2}\right)$ l'autre centrée au point diamétralement opposé de coordonnées $\left(-\frac{\lambda d_i f_X}{2}, \frac{-\lambda d_i f_Y}{2}\right)$. Le dénominateur normalise simplement cette aire commune par l'aire totale de la pupille. Donc:

$$\boldsymbol{H}(f_X, f_Y) = \frac{\text{aire de la partie commune}}{\text{aire totale}}$$

Pour calculer la FTO d'un système limité par la diffraction, on peut suivre pas à pas cette interprétation comme le montre la figure (6-4). Pour des formes géométriquement simples, on peut trouver facilement les expressions des aires communes normalisées (voir les exemples qui suivent). Dans le cas de pupilles très compliquées, on peut calculer les valeurs de la FTO pour un certain nombre de fréquences discrètes à l'aide d'un planimètre où d'un calculateur digital.

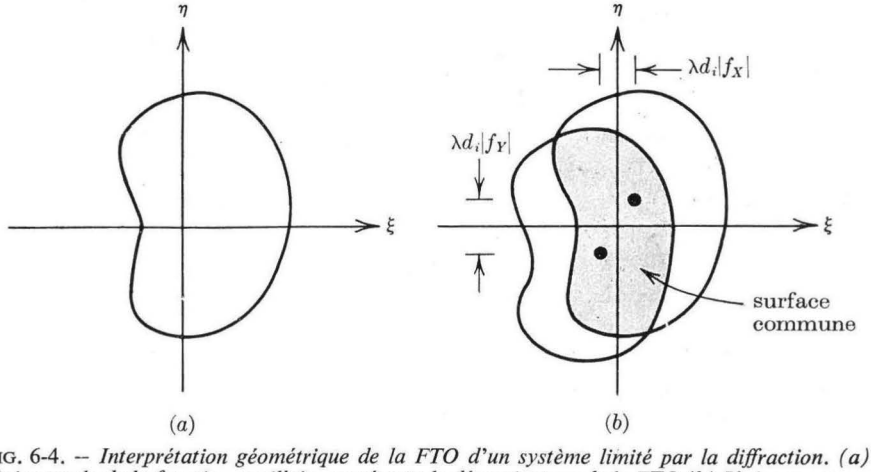


FIG. 6-4. -- *Interprétation géométrique de la FTO d'un système limité par la diffraction. (a) L'aire totale de la fonction pupillaire représente le dénominateur de la FTO (b) L'aire commune (hachurée) à deux fonctions pupillaires décalées représente le numérateur.*

Pour terminer, notons que cette interprétation géométrique montre que la FTO d'un système limité par la diffraction est toujours *réelle* mais *jamais négative*. Cependant elle n'est pas nécessairement une fonction qui décroît de façon monotone avec la fréquence (voir par exemple le problème 6-1).

Exemples de FTO de systèmes limités par la diffraction. — Etudions maintenant les fonctions de transfert optiques correspondant aux systèmes limités par la diffraction dont les pupilles de sortie sont un carré (de côté l) et un cercle (de diamètre l).

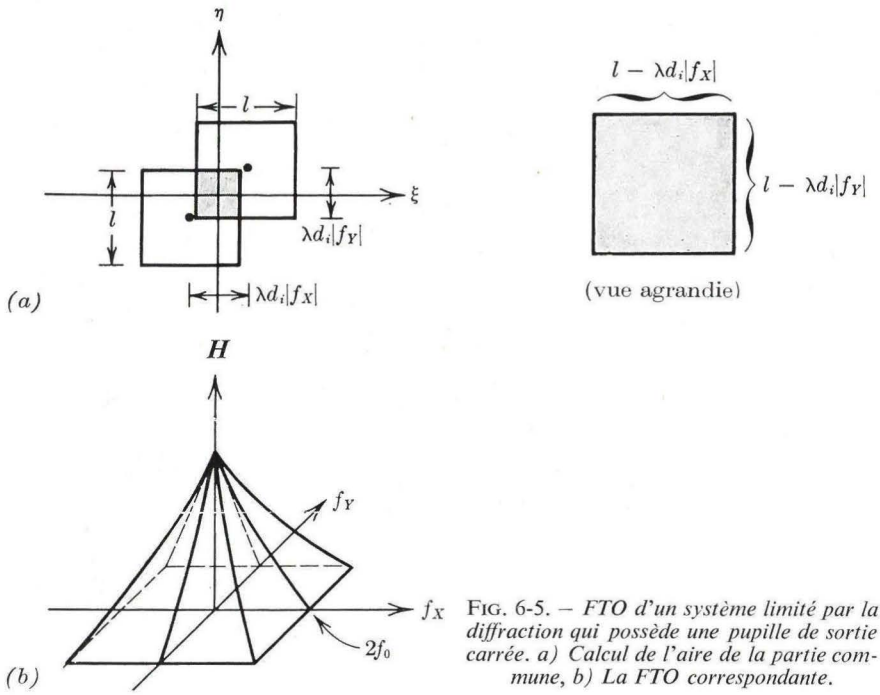


FIG. 6-5. — *FTO d'un système limité par la diffraction qui possède une pupille de sortie carrée. a) Calcul de l'aire de la partie commune, b) La FTO correspondante.*

La figure 6-5*a* illustre le calcul dans le cas de la pupille carrée. L'aire de la partie commune est évidemment:

$$\mathcal{A}(f_X, f_Y) = \begin{cases} (l-\lambda d_i\,|f_X|)(l-\lambda d_i\,|f_Y|) & \text{pour} \quad f_X \leqslant \dfrac{l}{\lambda d_i} \quad \text{et} \quad f_Y \leqslant \dfrac{l}{\lambda d_i} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

Lorsqu 'on normalise cette aire par l'aire totale l^2, on obtient le résultat:

$$\boldsymbol{H}(f_X, f_Y) = \text{tri}\left(\frac{f_X}{2f_0}\right) \cdot \text{tri}\left(\frac{f_Y}{2f_0}\right) \tag{6-30}$$

dans lequel apparaît la fonction triangle du chapitre 2; f_0 est la fréquence de coupure du même système quand il est éclairé en lumière cohérente:

$$f_0 = \frac{l}{2\lambda d_i}$$

Remarquons que la fréquence de coupure du système en lumière incohérente le long des axes f_X et f_Y est double de la fréquence de coupure qui intervient en éclairage cohérent.[1] La figure 6-5*b* représente la FTO dont l'expression est donnée par (6-30). Lorsque la pupille de sortie est circulaire le calcul n'est pas aussi immédiat. Comme la FTO possède évidemment la symétrie de révolution il suffit de calculer $\boldsymbol{H}$ le long de l'axe f_X. Ainsi que le montre la figure 6-6*a*, on peut considérer que l'aire commune est égale à quatre fois l'aire hachurée B du secteur circulaire $A+B$. Or, l'aire du secteur circulaire s'écrit:

$$\text{aire } (A+B) = \left[\frac{\theta}{2\pi}\right]\left[\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2\right] = \left[\frac{\text{Arcos}\,(\lambda d_i f_X/l)}{2\pi}\right]\left[\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2\right]$$

et celle du triangle A:

$$\text{aire } A = \frac{1}{2}\left(\frac{\lambda d_i f_X}{2}\right)\sqrt{\left(\frac{l}{2}\right)^2 - \left(\frac{\lambda d_i f_X}{2}\right)^2}$$

Nous avons donc:

$$\boldsymbol{H}(f_X, 0) = \frac{4[\text{Aire}\,(A+B) - \text{Aire}\,A]}{\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2}$$

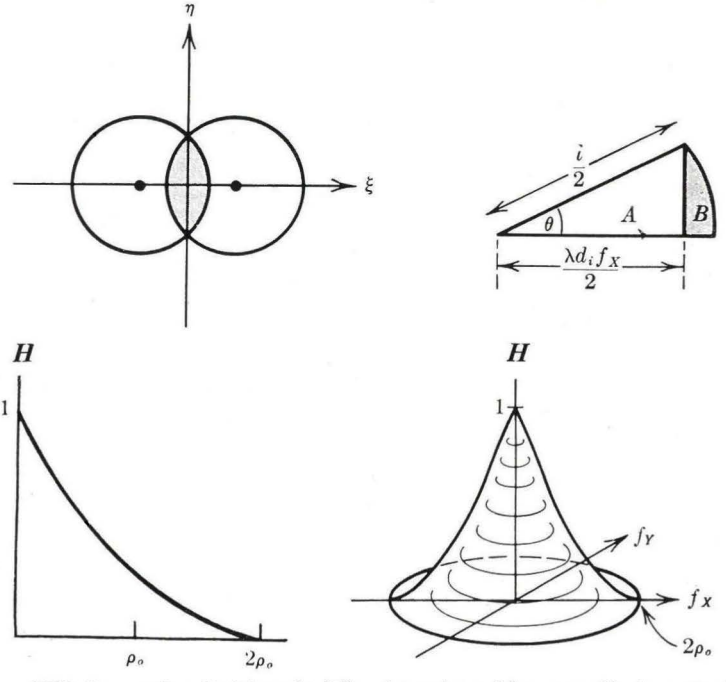


FIG. 6-6. – *FTO d'un système limité par la diffraction qui possède une pupille de sortie circulaire a) Calcul de l'aire de la partie commune. b) La FTO correspondante.*

[1] On ne doit pas en déduire qu'un système incohérent a un pouvoir de résolution double de celui du système cohérent correspondant (voir le paragraphe 6-5).

soit pour un déplacement radial quelconque ϱ dans le plan des fréquences:

$$\boldsymbol{H}(\varrho) = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left[\text{Arcos}\left(\dfrac{\varrho}{2\varrho_0}\right) - \dfrac{\varrho}{2\varrho_0}\sqrt{1-\left(\dfrac{\varrho}{2\varrho_0}\right)^2}\right] & \varrho \leqslant 2\varrho_0 \\ 0 \qquad \text{ailleurs} \end{cases} \tag{6-31}$$

La quantité ϱ_0 n'est autre que la fréquence de coupure du système cohérent:

$$\varrho_0 = \frac{l}{2\lambda d_i}$$

En se reportant à la figure 6-6*b*, on voit qu' ici encore la FTO s'étend jusqu'à une fréquence qui est le double de la fréquence de coupure en éclairage cohérent.

6-4. — LES ABERRATIONS ET LEURS EFFETS SUR LA RÉPONSE FRÉQUENTIELLE

Lors de l'étude du schéma très général d'un système optique, nous avons supposé en particulier qu'un point source objet donnait, dans la pupille de sortie, une onde sphérique parfaite convergeant vers un point géométrique du plan image. Nous avons dit qu'un tel système était *limité par la diffraction*. Considérons maintenant les effets des *aberrations* ou écarts dans la pupille de sortie entre la surface d'onde et la surface sphérique idéale. Les aberrations peuvent avoir des origines très diverses allant d'un simple défaut de mise au point, jusqu'aux propriétés inhérentes aux lentilles parfaitement sphériques telles que l'aberration de sphéricité. Une étude complète des aberrations et de leurs effets sur la réponse fréquentielle dépasse le cadre de cet ouvrage. Nous nous intéresserons plutôt à des effets très généraux et nous les illustrerons par des exemples relativement simples. Pour une étude plus complète des divers types d'aberrations et de leurs effets sur la réponse fréquentielle, on consultera par exemple la référence 3-4, chapitre IX.

La fonction pupillaire généralisée. — Quand un système optique est limité par la diffraction, on a vu que la réponse impulsionnelle cohérente s'identifie à la figure de diffraction de Fraunhofer de la pupille de sortie, centrée au point image géométrique. Ce fait suggère d'utiliser un artifice commode permettant d'inclure les aberrations dans les résultats que nous avons déjà établis. Plus précisément, quand la surface d'onde présente des écarts par rapport à la surface d'onde idéale, nous pouvons imaginer que la pupille de sortie est effectivement éclairée par une onde sphérique idéale, mais qu'il existe dans le plan de la pupille une lame de phase qui déforme cette surface de l'onde parfaitement sphérique. Si on représente l'écart de phase, au point de coordonnées (x, y) dans le plan de la pupille de sortie, par $kW(x, y)$ où $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$ et où W est la variation de chemin optique qui intervient, la transmittance complexe $\mathbf{P}$ de la lame de phase fictive est alors donnée par:

$$\mathbf{P}(x, y) = P(x, y) \exp\,[jkW(x, y)] \tag{6-32}$$

On appellera la fonction complexe **P** fonction pupillaire *généralisée*. La réponse impulsionnelle d'un système cohérent possédant des aberrations est alors tout simplement la figure de diffraction de Fraunhofer d'un ouverture de transmittance **P**. Evidemment, la réponse impulsionnelle d'un système incohérent possédant des aberrations est encore le carré du module de la réponse impulsionnelle obtenue en lumière cohérente.

Effets des aberrations sur la fonction de transfert cohérente. — Dans le cas d'un système cohérent limité par la diffraction, on a pu déterminer la fonction de transfert en remarquant que (1) la réponse impulsionnelle est la transformée de Fourier de la fonction pupillaire et que (2) la fonction de transfert cohérente est la transformée de Fourier de la réponse impulsionnelle. Comme on l'a vu, il résulte de ces deux transformations que la fonction de transfert est proportionnelle à la fonction pupillaire *P*. En présence d'aberrations. On peut faire un raisonnement identique à condition de remplacer la fonction *P* par la fonction pupillaire généralisée **P**. La fonction de transfert cohérente s'écrit ainsi:

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y) = \mathbf{P}(\lambda d_i f_X, \lambda d_i f_Y) = \mathrm{P}(\lambda d_i f_X, \lambda d_i f_Y) \exp\,[jkW(\lambda d_i f_X, \lambda d_i f_Y)] \tag{6-33}$$

Il apparaît donc que la largeur de bande de la fonction de transfert cohérente, imposée par les dimensions finies de l'ouverture de sortie, n'est pas modifiée par la présence des aberrations. On voit que le seul effet des aberrations est d'introduire des *distorsions de phase* à l'intérieur de la bande passante. Ces distorsions de phase peuvent bien sûr diminuer sérieusement les performances du système.

Il y a peu à ajouter à ces considérations générales sur les effets des aberrations des surfaces d'ondes dans le cas d'un système éclairé en lumière cohérente. Le résultat que nous trouvons est très simple. Nous allons voir que dans le cas d'un système incohérent il est plus complexe et à beaucoup d'égards plus intéressant.

Effets des aberrations sur la FTO. — Ayant déterminé les effets des aberrations sur la fonction de transfert cohérente, il est désormais possible, à l'aide de la relation (6-27), de trouver les effets de ces aberrations sur la fonction de transfert optique. Pour simplifier les notations, définissons la fonction $\mathcal{A}(f_X, f_Y)$ par *l'aire commune* à

$$P\left(\xi - \frac{\lambda d_i f_X}{2}, \eta - \frac{\lambda d_i f_Y}{2}\right) \quad \text{et} \quad P\left(\xi + \frac{\lambda d_i f_X}{2}, \eta + \frac{\lambda d_i f_Y}{2}\right)$$

Ainsi la FTO d'un système limité par la diffraction est donnée, avec cette nouvelle notation, par:

$$\boldsymbol{H}(f_X, f_Y) = \frac{\displaystyle\iint_{\mathcal{A}(f_X, f_Y)} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta}{\displaystyle\iint_{\mathcal{A}(0,\,0)} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta}$$

En présence d'aberrations, la substitution de (6-33) dans (6-27) donne:

$$\boldsymbol{H}(f_X, f_Y) = \frac{\displaystyle\iint_{\mathcal{A}(f_X, f_Y)} \exp\left\{jk\left[W\left(\xi+\frac{\lambda d_i f_X}{2}, \eta+\frac{\lambda d_i f_Y}{2}\right) - W\left(\xi-\frac{\lambda d_i f_X}{2}, \eta-\frac{\lambda d_i f_Y}{2}\right)\right]\right\} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta}{\displaystyle\iint_{\mathcal{A}(0,\,0)} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta} \tag{6-34}$$

Cette expression nous permet ainsi de relier directement la FTO aux écarts entre la surface d'onde et la surface sphérique idéale.

On peut démontrer l'importante propriété générale suivante: les aberrations ne *peuvent jamais accroître* la FTM (c'est-à-dire le module de la FTO). Pour cela on utilisera l'inégalité de Schwarz donnée par (6-28). Définissons les fonctions $\mathbf{X}$ et $\mathbf{Y}$ par:

$$\mathbf{X}(\xi, \eta) = \exp\left[jkW\left(\xi+\frac{\lambda d_i f_X}{2}, \eta+\frac{\lambda d_i f_Y}{2}\right)\right]$$

$$\mathbf{Y}(\xi, \eta) = \exp\left[-jkW\left(\xi-\frac{\lambda d_i f_X}{2}, \eta-\frac{\lambda d_i f_Y}{2}\right)\right]$$

En remarquant que $|\mathbf{X}|^2 = |\mathbf{Y}|^2 = 1$ il en résulte:

$$|\boldsymbol{H}(f_X, f_Y)|^2_{\text{avec aberrations}} = \left| \frac{\displaystyle\iint_{\mathcal{A}(f_X, f_Y)} \exp\left\{jk\left[W\left(\xi+\frac{\lambda d_i f_X}{2}, \eta+\frac{\lambda d_i f_Y}{2}\right) - W\left(\xi-\frac{\lambda d_i f_X}{2}, \eta-\frac{\lambda d_i f_Y}{2}\right)\right]\right\} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta}{\displaystyle\iint_{\mathcal{A}(0,\,0)} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta} \right|$$

$$\leqslant \left[\frac{\displaystyle\iint_{\mathcal{A}(f_X, f_Y)} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta}{\displaystyle\iint_{\mathcal{A}(0,\,0)} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta}\right]^2 = |\boldsymbol{H}(f_X, f_Y)|^2_{\text{sans aberration}}$$

Les aberrations affaiblissent donc en général chaque composante fréquentielle de l'image. La valeur de la fréquence de coupure reste inchangée mais la présence d' aberrations importantes atténue les parties de la FTO correspondant aux fréquences élevées, si bien que la fréquence de coupure effective est bien inférieure à la fréquence de coupure dans le cas du même système limité seulement par la diffraction. En outre, les aberrations peuvent donner à la FTO des valeurs *négatives* dans certaines bandes de fréquences, ce qui n'apparaît jamais pour un système dépourvu d'aberration. Lorsque la FTO est négative les composantes de l'image correspondant à ces fréquences subissent une inversion de contraste: les maxima d'intensité deviennent des zéros d'intensité et vise et versa. On verra un exemple de ces effets dans le paragraphe suivant.

Exemple d'aberration simple : l'erreur de mise au point. — L'une des aberrations les plus faciles à traiter mathématiquement est l'erreur de mise au point, Même dans ce cas simple, nous allons supposer que l'ouverture est *carrée* afin de simplifier le calcul (le cas de l'ouverture circulaire serait plus intéressant en pratique).

Comme nous l'avons vu au paragraphe 5-3, la condition de mise au point est exprimée par la loi de conjugaison des lentilles:

$$\frac{1}{d_i}+\frac{1}{d_0}-\frac{1}{\varphi}=0$$

Quand le plan d'observation de l'image n'est pas le plan conjugué, on obtient la relation plus générale:

$$\frac{1}{d_i}+\frac{1}{d_0}-\frac{1}{\varphi}=\varepsilon$$

En comparant les relations (5-30) et (6-33) on voit que la fonction d'aberration W est:

$$W(x, y)=\frac{\varepsilon(x^2+y^2)}{2} \tag{6-35}$$

Pour une ouverture carrée de côté l, l'écart de phase maximal au bord de l'ouverture (suivant l'axe des x ou l'axe des y) est $\frac{\varepsilon k l^2}{8}$. L'écart maximal de chemin optique

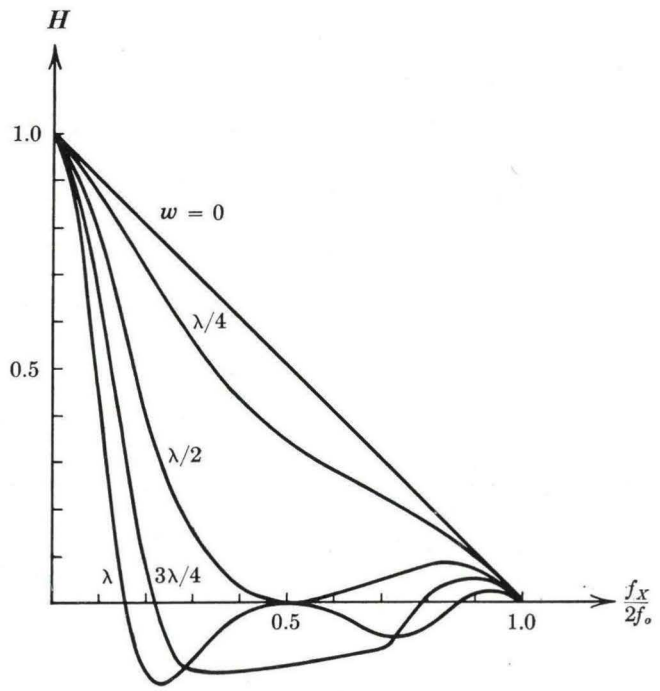
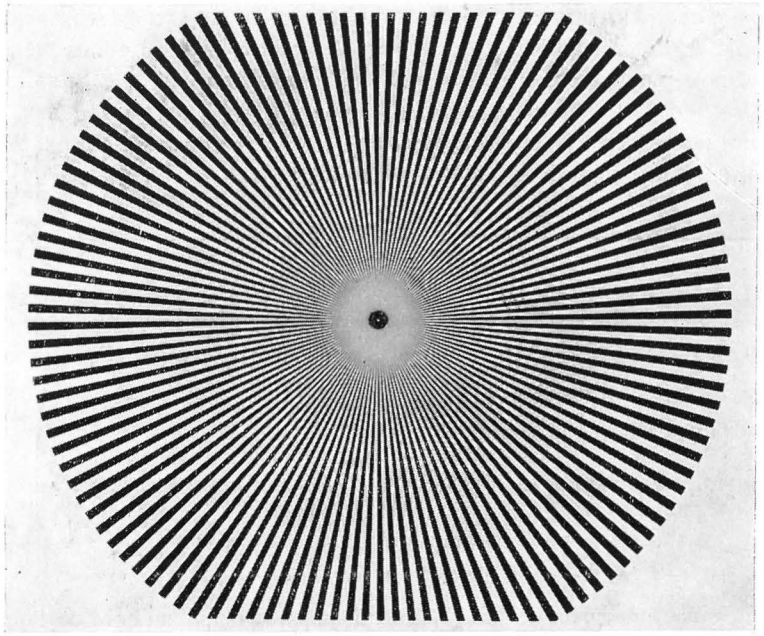
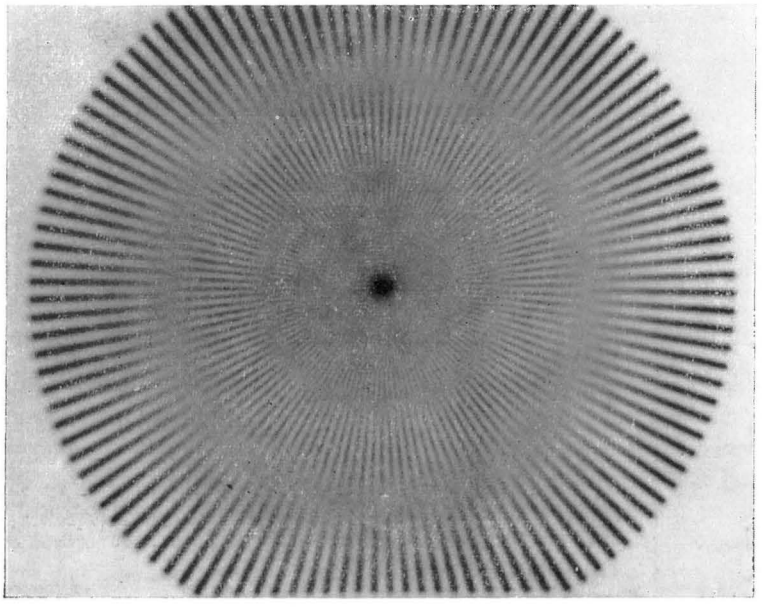


FIG. 6-7. — *Variation de la FTO pour une pupille carrée lorsqu'il y a erreur de mise au point.*



(a)



(b)

FIG. 6-8. — *Images d'une mire radiale. a) Cas de la meilleure mise au point. b) Cas de la défocalisation.*

que l'on notera w est donc donné par

$$w = \frac{\varepsilon l^2}{8} \tag{6-36}$$

Le nombre w traduit de façon commode l'importance du défaut de mise au point.

Si on substitue la fonction aberration W donnée par (6-35), dans l'expression (6-34) de la FTO, il vient après un certain nombre d'opérations simples:

$$\boldsymbol{H}(f_X, f_Y) = \text{tri}\left(\frac{f_X}{2f_0}\right) \text{tri}\left(\frac{f_Y}{2f_0}\right) \text{sinc}\left[\frac{8w}{\lambda}\left(\frac{f_X}{2f_0}\right)\left(1 - \frac{|f_X|}{f_0}\right)\right]$$

$$\times \text{sinc}\left[\frac{8w}{\lambda}\left(\frac{f_Y}{2f_0}\right)\left(1 - \frac{|f_Y|}{f_0}\right)\right] \tag{6-37}$$

La figure 6-7 représente le graphe de $\boldsymbol{H}\left(\frac{f_X}{2f_0}\right)$. Remarquons que la FTO relative à un système dépourvu d'aberrations s'obtient en faissant $w = 0$. Notons aussi que pour des valeurs de w supérieures à $\lambda/2$, la FTO peut changer de signe. Ces inversions de contraste peuvent être facilement observées si on utilise comme objet la mire «radiale» de la figure 6-8*a*. Quand le système est défocalisé, il apparaît une atténuation progressive du contraste et un certain nombre d'inversions de ce contraste au fur et à mesure que la fréquence spatiale augmente (c'est-à-dire au fur et à mesure que le rayon décroît) comme le montre la figure 6-8*b*.

Pour terminer, étudions la forme de la FTO lorsque la défocalisation est très grande (soit lorsque $w \gg \lambda$). Dans ce cas la réponse fréquentielle s'annule pour des valeurs relativement faibles de $\frac{f_X}{2f_0}$ et $\frac{f_Y}{2f_0}$. Nous pouvons par conséquent écrire:

$$1 - \frac{|f_X|}{2f_0} \cong 1 \qquad 1 - \frac{|f_Y|}{2f_0} \cong 1$$

et la FTO se réduit à:

$$\boldsymbol{H}(f_X, f_Y) \cong \text{sinc}\left[\frac{8w}{\lambda}\left(\frac{f_Y}{2f_0}\right)\right] \text{sinc}\left[\frac{8w}{\lambda}\left(\frac{f_Y}{2f_0}\right)\right] \tag{6-38}$$

Le lecteur pourra vérifier (voir Pb. 6-6) que c'est précisément la valeur de la FTO que prévoit l'optique géométrique. Plus généralement, lorsque des aberrations, quelles qu'elles soient, sont très importantes, on obtient une bonne approximation de la FTO d'un système à partir de la réponse impulsionnelle donnée par l'optique géométrique par transformation de Fourier.

6-5. — ÉTUDE COMPARATIVE DE LA FORMATION DES IMAGES EN LUMIÈRE COHÉRENTE ET EN LUMIÈRE INCOHÉRENTE

Comme nous l'avons vu dans les chapitres 6-2 et 6-3, la FTO d'un système limité par la diffraction s'étend jusqu'à une fréquence double de la fréquence de coupure de la fonction de transfert cohérente. Il est tentant par conséquent de conclure que l'éclairage incohérent donnera toujours de meilleures images que l'éclairage cohérent pour un même système optique. Comme nous le verrons, ce résultat est en général inexact; la comparaison de ces deux types d'éclairage est bien plus complexe qu'il ne semble a priori.

La principale erreur dans le raisonnement ci-dessus se trouve dans la comparaison directe des deux fréquences de coupure. En fait ces deux fréquences ne sont pas directement comparables. La fréquence de coupure en lumière cohérente définit la composante de fréquence maximale dans l'*amplitude image* alors que la fréquence de coupure en lumière incohérente définit la composante de fréquence maximale dans l'*intensité image;* cependant dans les deux cas la quantité observable est l'intensité. Il est bien évident que toute comparaison directe des deux systèmes ne peut se faire relativement à la même quantité observable, l'intensité de l'image.

Même quand cette dernière condition est satisfaite, la comparaison demeure difficile pour une autre raison fondamentale: le mot *meilleur* n'a pas été défini. Nous n'avons par conséquent aucun critère universel de qualité sur lequel baser nos jugements. On pourrait adopter différents critères (par exemple le plus petit écart quadratique moyen entre les intensités de l'objet et de l'image) mais, malheureusement, l'intervention finale d'un observateur humain est si complexe et si peu connue qu'il est difficile de donner un critère ayant une véritable signification.

En l'absence d'un critère de qualité qui ait un sens, nous ne pouvons qu'examiner certains aspects limités des deux types d'images, sachant bien que de telles comparaisons n'apportent probablement que peu d'information sur la qualité des images. Néanmoins de telles comparaisons qui mettent en lumière certaines différences fondamentales entre les deux types d'éclairage sont très instructives.

Spectre fréquentiel de l'intensité de l'image. — Une grandeur simple que l'on peut attribuer à l'intensité de l'image en vue de comparer le cas de l'éclairage cohérent et le cas de l'éclairage incohérent est son spectre de fréquences. Alors que le système en éclairage incohérent est linéaire pour l'intensité, le système en éclairage cohérent ne l'est pas du tout. Aussi dans ce dernier cas devons-nous déterminer le spectre fréquentiel avec beaucoup de prudence.

En éclairage incohérent, l'intensité de l'image est donnée par la relation de convolution:

$$I_i = |\hat{\mathbf{h}}|^2 * I_g = |\hat{\mathbf{h}}|^2 * |\mathbf{U}_g|^2$$

D'autre part en éclairage cohérent nous avons:

$$I_i = |\hat{\mathbf{h}} * \mathbf{U}_g|^2$$

Représentons le produit d'auto-corrélation par le symbole ★. Par définition

$$\mathbf{X}(f_X, f_Y) \star \mathbf{X}(f_X, f_Y) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{X}(\xi, \eta)\, \mathbf{X}^*(\xi - f_X, \eta - f_Y)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta \tag{6-39}$$

Le spectre fréquentiel de l'intensité image peut alors s'écrire:

$$\begin{aligned} &\text{— en éclairage incohérent: } \mathcal{F}\{I_i\} = [\mathbf{H} \star \mathbf{H}]\,[\mathbf{G}_g \star \mathbf{G}_g] \\ &\text{— en éclairage cohérent: } \quad \mathcal{F}\{I_i\} = [\mathbf{H}\mathbf{G}_g] \star [\mathbf{H}\mathbf{G}_g] \end{aligned} \tag{6-40}$$

$\mathbf{G}_g$ étant le spectre de $\mathbf{U}_g$ et $\mathbf{H}$ la fonction de transfert cohérente.

Le résultat général (6-40) ne permet pas de conclure, d'après le spectre fréquentiel de l'image, si un type d'éclairage est meilleur que l'autre. Il montre cependant que le spectre de l'image peut être assez différent dans les deux cas et qu'en outre les résultats d'une telle comparaison dépendent, dans une large mesure, des distributions à la fois de l'intensité et de la phase dans l'objet.

Pour souligner ce dernier point, considérons deux objets de *même* transmittance en intensité mais de distributions de phase différentes; nous allons voir que l'un donne une meilleure image en lumière cohérente et l'autre une meilleure image en lumière incohérente. Dans les deux cas définissons la transmittance en intensité de l'objet par

$$\tau(x_0, y_0) = \cos^2 2\pi f x_0$$

où

$$\frac{f_0}{2} < f < f_0$$

f_0 étant la fréquence de coupure en éclairage cohérent. Supposons que les transmittances en amplitude des deux objets soient données par:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_a(x_0, y_0) &= \cos 2\pi f x_0 \quad \text{pour l'objet } A \\ \mathbf{t}_b(x_0, y_0) &= |\cos 2\pi f x_0| \quad \text{pour l'objet } B \end{aligned} \tag{6-41}$$

Les deux transmittances ne diffèrent donc que par une distribution périodique de phase.

La figure 6-9 illustre les diverses opérations à effectuer dans le domaine des fréquences pour obtenir le spectre image dans le cas de l'objet A. Dans tous les cas on suppose que le système optique est limité par la diffraction. Remarquons que le contraste de la distribution d'intensité de l'image est plus *faible* dans le cas de l'éclairage incohérent que dans le cas de l'éclairage cohérent. Nous devons donc conclure que l'éclairage cohérent est *meilleur* pour cet objet particulier.

La comparaison dans le cas de l'objet B est plus immédiate. L'amplitude de l'objet est maintenant une fonction périodique de fréquence fondamentale $2f$. Mais puisque $2f > f_0$, *aucune* variation de l'intensité de l'image n'apparaît dans le cas de l'éclairage cohérent alors qu'en éclairage incohérent le système forme la même image que s'il s'agissait de l'objet A. L'éclairage incohérent est donc ici le meilleur.

En résumé, si on adopte comme critère de comparaison le spectre de l'image, le type d'éclairage particulier qui donne le meilleur résultat dépend fortement de la structure fine de l'objet et notamment de sa distribution de phase. Il *n'est pas possible*

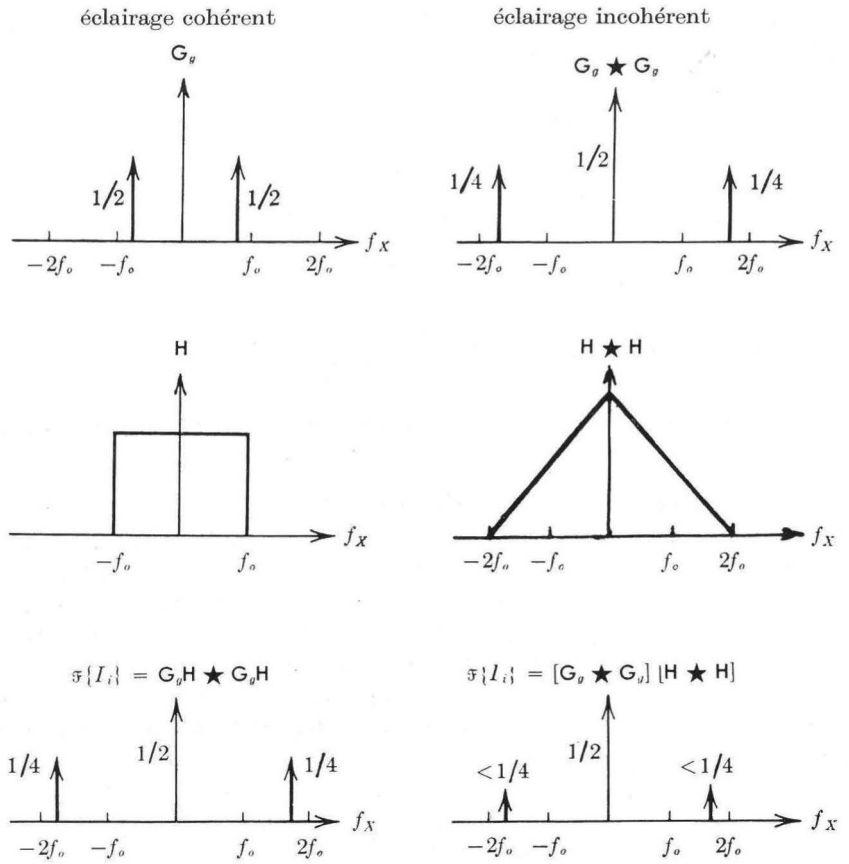


FIG. 6-9. — *Calcul du spectre de l'intensité de l'image pour l'objet A.*

de conclure qu'un type d'éclairage est dans tous les cas préférable à l'autre. La comparaison est en général complexe mais il existe des cas simples tels que celui que nous venons de voir. Un autre exemple simple est proposé au lecteur dans le problème 6-3.

Résolution de deux points. — Un second critère possible de comparaison repose sur l'aptitude des systèmes, dans les deux cas d'éclairage, à résoudre deux points sources rapprochés. Ce critère de résolution de deux points a été utilisé pendant longtemps comme facteur de qualité des systèmes optiques notamment dans les applications astronomiques où il a une véritable signification pratique.

Selon le *critère de résolution de Lord Rayleigh*, deux points sources incohérents sont «tout juste résolus» par un système (limité par la diffraction) lorsque le centre du disque d'Airy produit par l'une des deux sources coïncide avec le premier zéro du disque d'Airy relatif à la seconde source. La distance minimale résoluble des images géométriques est par conséquent:

$$\delta = 1{,}22 \cdot \frac{\lambda d_i}{l} \tag{6-42}$$

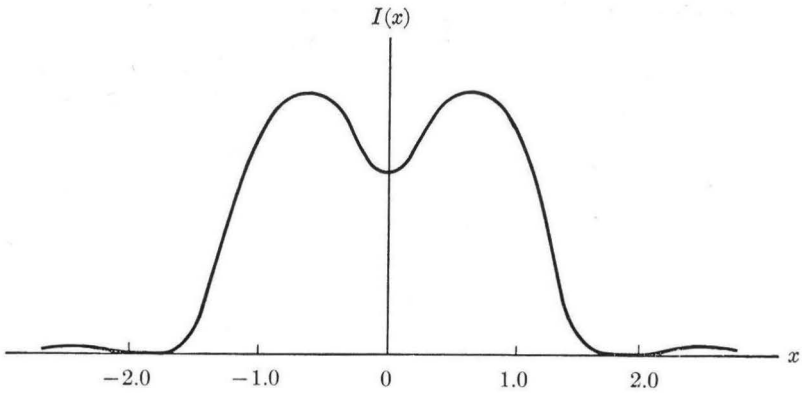


FIG. 6-10. — *Intensité de l'image de deux points sources incohérents séparés par la distance minimale de Rayleigh.*

où l est le diamètre de la pupille de sortie [voir (4-18)]. La figure (6-10) représente la distribution de l'intensité dans l'image dans le cas de la séparation minimale. Remarquons que le creux central représente environ les 19% de l'intensité maximale.

Nous pouvons nous demander maintenant si les deux sources ponctuelles séparées par la distance de Rayleigh δ seraient plus faciles ou plus difficiles à résoudre en éclairage cohérent qu'en éclairage incohérent. Cette question est bien sûr de pure forme pour des objets astronomiques qui sont toujours incohérents. Elle présente par contre de l'intérêt en microscopie où il est possible de choisir à volonté le mode d'éclairage.

Comme dans les exemples précédents on trouve que la réponse à cette question dépend de la *distribution de phase* de l'objet. On peut aisément écrire la variation de l'intensité de l'image en coordonnées normalisées sous la forme:

$$I(x) = \left| 2 \cdot \frac{J_1[\pi(x-0{,}61)]}{\pi(x-0{,}61)} + e^{j\phi} \cdot 2 \cdot \frac{J_1[\pi(x+0{,}61)]}{\pi(x+0{,}61)} \right|^2$$

où ϕ est la différence de phase entre les deux points sources. La figure 6-11 représente les distributions de l'intensité image pour deux points en phase ($\phi = 0°$), en quadrature ($\phi = 90°$) et en opposition de phase ($\phi = 180°$). Lorsque les sources sont en quadrature, la distribution de l'intensité dans l'image est identique à celle que l'on obtient pour deux points sources incohérents. Lorsque les objets sont en phase, le minimum central dans l'intensité de l'image disparaît et par conséquent les deux points ne sont pas aussi bien résolus que dans le cas de l'éclairage incohérent. Enfin lorsque les deux objets sont en opposition de phase, le creux central a une valeur supérieure à 19% et les deux points sont mieux résolus en éclairage cohérent qu'en éclairage incohérent. Ainsi, encore une fois, on ne peut pas dire d'une manière générale qu'un type d'éclairage est préférable à l'autre dans le cas de la résolution de deux points voisins.

Autres effets. — Les images formées en lumière cohérente possèdent diverses autres propriétés que l'on doit prendre en considération lorsqu'on les compare aux images

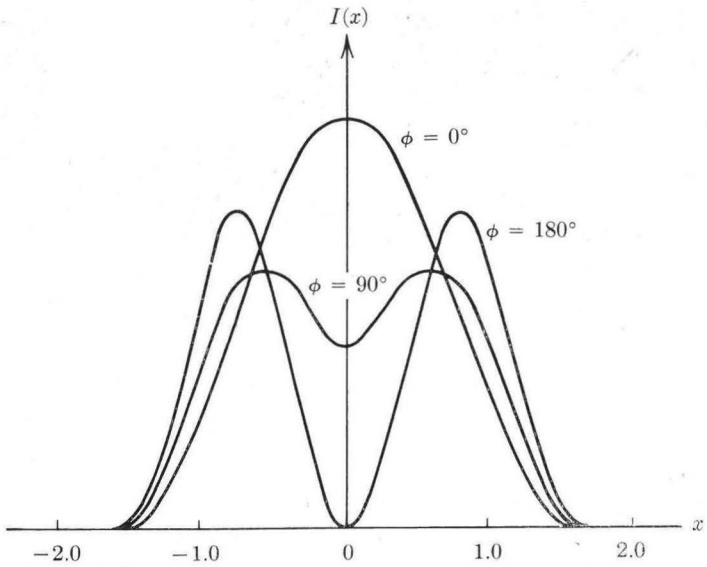


FIG. 6-11. – *Intensité de l'image de deux points sources cohérents séparés par la distance de Lord Rayleigh.*

formées en lumière incohérente (réf. 6-13). Tout d'abord, les effets des bords d'écran dans les systèmes incohérents et cohérents sont notablement différents. La figure 6-12 montre la réponse théorique d'un système possédant une pupille de sortie carrée lorsque l'objet est une fonction échelon. La figure 6-13 montre des photographies de l'image d'un bord d'écran dans les deux cas. On voit que l'image obtenue en éclairage cohérent présente des «oscillations» assez prononcées. Cette propriété est analogue aux oscillations qui existent dans les circuits amplificateurs vidéo dont la

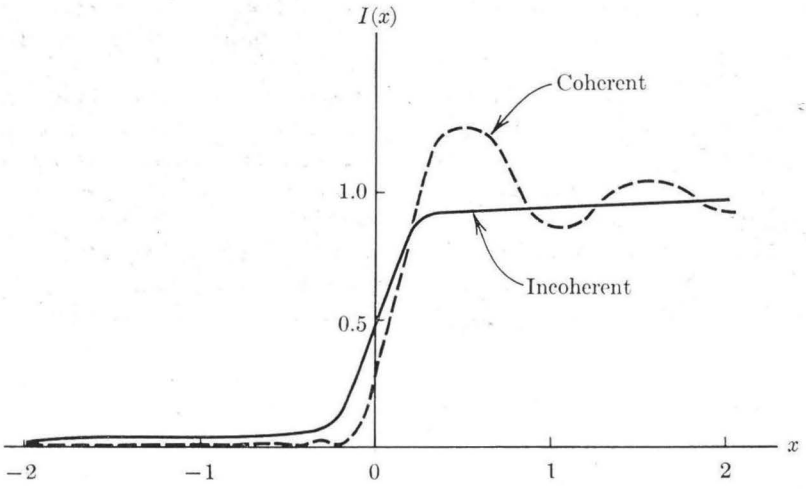
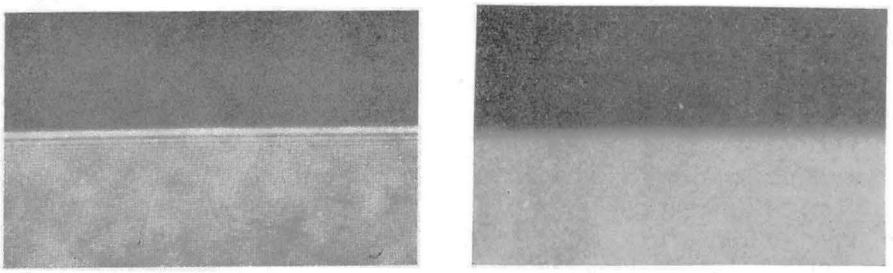


FIG. 6-12. – *Réponses théoriques en intensité données par des systèmes cohérent et incohérent à une fonction objet échelon unité.*



(a) *(b)*

FIG. 6-13. — *Photographies d'un bord d'écran rectiligne. a) Cas de l'éclairage cohérent. b) Cas de l'éclairage incohérent. (Avec la permission de P. S. Considine).*

fonction de transfert s'annule trop rapidement. Le système formant des images en lumière cohérente possède en effet une fonction de transfert qui présente, des discontinuités marquées alors que la chute de sa FTO est plus progressive. On voit sur les courbes de la figure 6-12 que les positions apparentes du bord (c'est-à-dire les positions définies par une intensité normalisée égale à un demi) diffèrent suivant les deux types d'éclairage; de légères erreurs s'introduisent dans le cas de l'éclairage cohérent. En outre, nous devons citer ce qu'on appelle l'effet de «*speckle*»[1] qu'on observe facilement en lumière très cohérente. La figure 6-14 montre des photographies d'un même objet éclairé en lumière cohérente et en lumière incohérente. La nature granuleuse de l'image cohérente provient de la «rugosité optique» de la surface de l'objet et de la grande cohérence de la source laser utilisée pour l'éclairer (voir par exemple

(a) *(b)*

FIG. 6-14. — *Images obtenues a) en éclairage cohérent, b) en éclairage incohérent et utilisant l'effet de «speckle». L'objet est un cliché photographique éclairé photographique à travers un diffuseur.*

[1] La traduction littérale de *speckle* est: petite tache. Nous nous conformerons à l'usage en adoptant le mot speckle pour désigner ce phénomène (N.d.T.).

les références 6-14 et 6-15). On peut montrer que la taille de ces *speckles élémentaires* est approximativement égale à celle d'une *cellule de résolution* de l'objet. Ainsi quand l'objet considéré a des dimensions voisines de la limite de résolution du système optique, l'effet de speckle peut être extrêmement gênant. En pratique on peut résoudre ce problème en plaçant un verre dépoli sur le trajet du faisceau et en le déplaçant pendant l'observation. La grande cohérence de la source est alors partiellement détruite et les speckles sont en grande partie supprimés.

Enfin l'éclairage très cohérent est particulièrement sensible aux imperfections optiques qui peuvent exister le long du chemin suivi par la lumière pour atteindre l'observateur. Par exemple de très petites poussières sur une lentille peuvent donner des figures de diffraction très nettes qui se superposent à l'image. Ici aussi, on peut atténuer ces effets en interposant sur le faisceau lumineux un diffuseur mobile tel qu'un verre dépoli.

6-6. — RÉSOLUTION AU-DELÀ DE LA LIMITE CLASSIQUE DE LA DIFFRACTION

Jusqu'à un date assez récente, il était généralement admis que les effets de la diffraction représentaient les limites fondamentales des performances d'un système optique. On croyait que la résolution au-delà des limites classiques de la diffraction n'était qu'une vaine espérance. Même dans le cas d'une lentille d'ouverture infiniment grande, la résolution serait limitée par les ondes évanescentes à une longueur d'onde environ.

Des travaux de recherche récents (réf. 6-17 à 6-19) ont cependant montré que pour certains types d'objets une résolution au-delà de la limite classique pouvait se concevoir[1]. En fait, comme nous le verrons dans ce paragraphe, pour la classe des objets spatialement *limités* il est, *en principe*, possible de résoudre ces objets avec une précision infinie.

Les raisons mathématiques fondamentales. — Il existe des raisons mathématiques absolument fondamentales qui font que la résolution au-delà de la limite classique est possible. Ces raisons reposent sur deux principes mathématiques de base que nous énoncerons ici sous forme de théorèmes. Pour la justification de ces principes, on verra par exemple la référence 6-20.

Théorème 1. — La transformée de Fourier bidimensionnelle d'une fonction limitée spatialement est une fonction *analytique* dans le plan $f_X f_Y$.

Théorème 2. — Si une fonction analytique quelconque du plan $f_X f_Y$ est parfaitement déterminée dans une région arbitrairement petite mais finie de ce plan, on peut déterminer la fonction entière, de façon unique, au moyen de la propriété de *continuité analytique*.

---

[1] Les travaux de G. Toraldo di Francia (réf. 6-17) sont particulièrement intéressants; il a utilisé la théorie des antennes superdirectives pour démontrer que la limite de résolution habituelle de Rayleigh est davantage d'origine pratique que théorique.

Pour un système quelconque formant des images en lumière cohérente ou incohérente, l'information image ne provient que d'une partie finie du spectre de l'objet[1], à savoir de la partie du spectre que la fonction de transfert du système a laissé passer. Si cette partie finie du spectre de l'objet peut être déterminée exactement à partir de l'image, on peut trouver, pour un objet limité, le spectre *entier* de l'objet par continuité analytique. A partir du spectre entier de l'objet, il est alors possible de reconstruire exactement l'objet considéré avec une précision infinie.

Une méthode particulière d'amélioration. — Bien que les principes mathématiques fondamentaux s'énoncent très facilement à l'aide de la propriété de continuité analytique, on peut envisager un certain nombre de méthodes particulières d'amélioration permettant d'obtenir le même résultat. L'une d'elles, particulièrement simple, a été étudiée par J. L. Harris (réf. 6-18). Supposons que l'objet soit limité par un rectangle de dimensions L_X et L_Y. D'après le théorème de Whittaker-Shannon, on peut écrire le spectre $\mathbf{G}_0(f_X, f_Y)$ de l'objet sous la forme[2]:

$$\mathbf{G}_0(f_X, f_Y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \mathbf{G}_0\left(\frac{n}{L_X}, \frac{m}{L_Y}\right) \operatorname{sinc}\left[L_X\left(f_X - \frac{n}{L_X}\right)\right] \operatorname{sinc}\left[L_Y\left(f_Y - \frac{m}{L_Y}\right)\right] \tag{6-43}$$

où $\mathbf{G}_0\left(\frac{n}{L_X}, \frac{m}{L_Y}\right)$ est la valeur échantillonnée de $\mathbf{G}_0(f_X, f_Y)$ au point de coordonnées $\left(\frac{n}{L_X}, \frac{m}{L_Y}\right)$, n et m étant des entiers.

Comme le système optique possède une bande passante limitée, on ne peut obtenir les valeurs de $\mathbf{G}_0\left(\frac{n}{L_X}, \frac{m}{L_Y}\right)$ que pour des valeurs limitées de n et m.

Il faut évidemment connaître $\mathbf{G}_0$ pour des valeurs entières de n et m plus élevées soit $n = +N$ et $m = +M$, de telle sorte que l'approximation:

$$\mathbf{G}_0(f_X, f_Y) \cong \sum_{n=-N}^{N} \sum_{m=-M}^{M} \mathbf{G}_0\left(\frac{n}{L_X}, \frac{m}{L_Y}\right) \operatorname{sinc}\left[L_X\left(f_X - \frac{n}{L_X}\right)\right] \operatorname{sinc}\left[L_Y\left(f_Y - \frac{m}{L_Y}\right)\right] \tag{6-44}$$

donne des valeurs exactes de $\mathbf{G}_0(f_X, f_Y)$ au moins dans une certaine région finie située à *l'extérieur* de la bande passante du système. En d'autres termes, la relation (6-44) nous permettra de déterminer le spectre de l'objet au moins dans une région finie située à l'*extérieur* de la bande passante si on peut déterminer un nombre suffisant de *valeurs échantillonnées* situées en dehors de cette bande passante.

Pour déterminer ces valeurs échantillonnées situées en dehors de la bande passante, on peut utiliser la relation (6-44) d'une autre manière: on mesure les valeurs de $\mathbf{G}_0$ pour $(2N+1)(2M+1)$ fréquences se trouvant à l'intérieur de la bande passante;

---

[1] Par *spectre objet* nous entendons bien sûr le spectre de l'amplitude objet dans le cas de l'éclairage cohérent et le spectre de l'intensité objet dans le cas de l'éclairage incohérent.

[2] On peut montrer directement le caractère analytique de $\mathbf{G}_0$ à partir de (6-43) en développant les fonctions sinc en série: on montre ainsi que $\mathbf{G}_0$ est développable en série.

en remplaçant le premier membre de (6-44) par l'une quelconque de ces valeurs mesurées, on obtient une équation avec les $(2N+1)(2M+1)$ inconnues[1] suivantes:

$$\mathbf{G}_0\left(\frac{n}{L_X}, \frac{m}{L_Y}\right) \quad \text{pour} \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N \quad \text{et} \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm N$$

Par suite les $(2N+1)(2M+1)$ valeurs connues de $\mathbf{G}_0$ engendrent $(2N+1)(2M+1)$ équations linéaires avec $(2N+1)(2M+1)$ inconnues. Cet ensemble d'équations peut en principe être résolu pour donner un ensemble de valeurs échantillonnées qui s'étendent bien au-delà de la bande passante. Le théorème d'échantillonnage nous permet alors de calculer les valeurs approchées de $\mathbf{G}_0$ entre les points d'échantillonnage: nous avons ainsi réussi à obtenir au moins une partie du spectre située en dehors de la bande passante. Une transformation de Fourier permet alors d'obtenir une image avec une résolution meilleure que la limite de résolution classique.

Limitations pratiques. — Une fois bien compris les principes mathématiques sur lesquels repose la théorie de la résolution au-delà de la limite classique, il reste néanmoins à appliquer ces principes aux systèmes optiques réels. La difficulté principale repose sur le *bruit* qui accompagne invariablement toute mesure du spectre de l'objet à l'intérieur de la bande passante. L'imprécision de la mesure à l'intérieur de la bande passante peut être fortement amplifiée lorsqu'on résout le système d'équations linéaires pour obtenir les valeurs échantillonnées en des points situés à l'extérieur de la bande passante; de telles valeurs échantillonnées sont en effet des combinaisons linéaires de *toutes* les valeurs mesurées, chacune d'entre elles comportant un certain bruit. Le problème de l'amélioration de l'image demeure un sujet de recherche active et seul l'avenir nous dira jusqu'à quel point on pourra exploiter avec succès ces techniques.

PROBLÈMES

6-1. Un système optique, destiné à former des images en lumière incohérente, possède une pupille de sortie carrée de côté l. On dispose un diaphragme carré, de largeur $\frac{l}{2}$ au centre de la pupille de sortie, comme l'indique la figure P 6-1.

a) Représenter en fonction de la fréquence les variations de la fonction de transfert optique en présence et en l'absence du diaphragme central.

b) Représenter la forme limite de la fonction de transfert optique, lorsque la taille du diaphragme central tend vers celle de la pupille de sortie.

6-2. Un système formant des images en éclairage incohérent possède une pupille de sortie circulaire de diamètre l. On place sur cette pupille de sortie un diaphragme constitué par un demi-plan opaque, comme l'indique la figure P 6-2. Déterminer les expressions de la fonction de transfert optique suivant les directions des axes f_X et f_Y.

6-3. On forme à l'aide d'une lentille à fonction pupillaire circulaire, l'image d'un objet dont la transmittance en amplitude est une fonction «créneau» (fig. P 6-3). La distance focale de la lentille est égale à 10 cm, la fréquence fondamentale de la fonction

[1] En fait quelques unes de ces inconnues peuvent se trouver à l'intérieur de la bande passante et être par conséquent connues, mais cela ne fait que rendre l'amélioration plus facile.

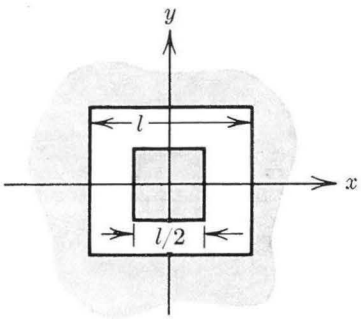


FIG. P 6-1. –

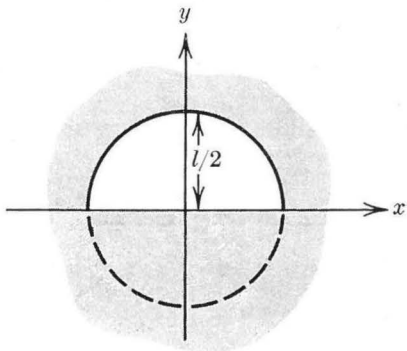


FIG. P 6-2. –

«créneau» à 1000 périodes/cm, la distance objet à 20 cm et la longueur d'onde à 10^{-4} cm. Calculer le diamètre minimum de la lentille qui permet d'obtenir *toutes les variations* de l'intensité dans le plan de l'image:

a) dans le cas où l'éclairage de l'objet est cohérent.

b) dans le cas où l'éclairage de l'objet est incohérent.

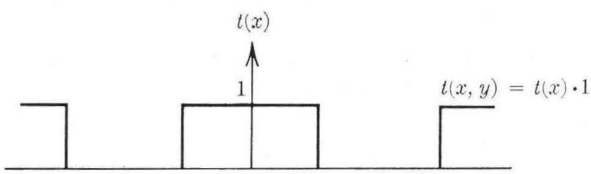


FIG. P 6-3. –

6-4. On utilise une mire sinusoïdale de transmittance en amplitude:

$$t(x, y) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\pi f x)$$

pour étudier un système optique en éclairage cohérent. On suppose que la fréquence f est assez faible pour être transmise par le système; on ne tient pas compte du grandissement et on néglige toute atténuation due au système.

a) Déterminer la distribution d'intensité dans le plan image pour un système dépourvu d'aberration.

b) Montrer qu'une même distribution d'intensité apparaît dans une infinité de plans images défocalisés.

6-5. Un réseau sinusoïdal dont la transmittance en amplitude est donnée par:

$$t(x, y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\pi f x$$

est placé devant une lentille convergente (ayant une ouverture circulaire de diamètre l, et une distance focale φ). Il est éclairé sous une incidence oblique par une onde plane monochromatique se propageant dans la direction faisant l'angle θ avec l'axe Oz, comme l'indique la figure P 6-5.

a) Déterminer le spectre de Fourier de la distribution d'amplitude lumineuse transmise par cet objet.

b) On choisit $d_0 = d_i = 2\varphi$; calculer la valeur maximale de l'angle θ pour laquelle toutes les variations de l'intensité apparaîtront dans le plan image.

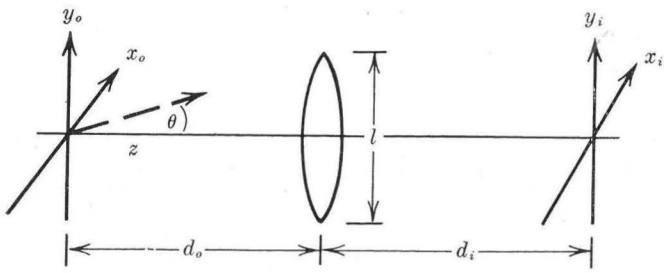


FIG. P 6-5. –

c) En supposant que l'on utilise cette valeur maximale de θ, déterminer la distribution d'intensité dans le plan image et la comparer à la distribution d'intensité correspondant au cas où $\theta = 0$.

d) Lorsque l'angle θ est maximal, calculer la fréquence spatiale maximale f_m du réseau qui donne des variations d'intensité dans le plan image. Comparer cette fréquence à la fréquence de coupure correspondant au cas où $\theta = 0$?

6-6. En se référant à l'équation (6-38), montrer que la fonction de transfert optique déduite de l'optique géométrique pour un système défocalisé dont la pupille est carrée est:

$$H(f_X, f_Y) = \text{sinc}\left[\frac{8\omega}{\lambda}\left(\frac{f_X}{2f_0}\right)\right] \text{sinc}\left[\frac{8\omega}{\lambda}\left(\frac{f_Y}{2f_0}\right)\right]$$

ω étant la variation maximale de chemin optique le long des axes x et y et f_0 la fréquence de coupure en éclairage cohérent.

6-7. Un objet a une transmittance en intensité donnée par:

$$\tau(x, y) = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\pi f x)$$

et il introduit un retard de phase constant sur l'ensemble du plan objet. On forme l'image de cet objet à l'aide d'une lentille convergente de diamètre l et de distance focale φ, comme l'indique la figure P 6-7. Comparer les fréquences maximales f_m transmises par le système dans le cas de l'éclairage cohérent et dans celui de l'éclairage incohérent.

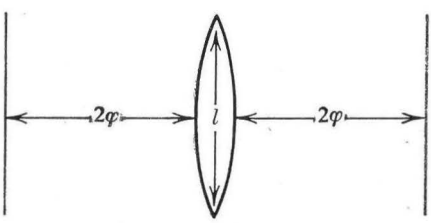


FIG. P 6-7. –

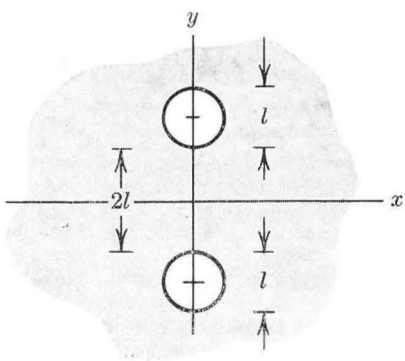


FIG. P 6-8. –

6-8. Représenter les variations de la fonction de transfert optique en fonction de f_X et f_Y, pour un système formant des images en lumière incohérente dont la pupille est représentée par la figure P 6-8. (Préciser sur ces graphes les différentes fréquences de coupure).

6-9. Un certain objet à la propriété suivante: toutes les composantes fréquentielles de sa transmittance en amplitude sont situées sur des cercles du plan des fréquences, dont les rayons sont donnés par:

$$\varrho_m = \sqrt{2ma} \text{ avec } m = 0, 1, 2, 3 \ldots$$

En supposant qu'il est éclairé par une onde plane uniforme et en négligeant les effets de la diffraction dus au fait que les dimensions de cet objet sont finies, montrer qu'un tel objet forme ses propres images, situées à des distances périodiques.

6-10. Une quantité très commode pour déterminer l'importance des aberrations d'un système fonctionnant en lumière incohérente est la «Strehl definition $\mathcal{D}$» qui est définie par le rapport de l'intensité lumineuse maximale de la fonction d'étalement (réponse impulsionnelle) au maximum de la fonction d'étalement du même instrument en l'absence d'aberration. Montrer que $\mathcal{D}$ est égal au volume normalisé situé sous la fonction de transfert optique de l'instrument, c'est-à-dire:

$$\mathcal{D} = \frac{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int |\boldsymbol{H}(f_X, f_Y)|_{\text{avec aberrations}}\, \mathrm{d}f_X\, \mathrm{d}f_Y}{\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\int |\boldsymbol{H}(f_X, f_Y)|_{\text{sans aberration}}\, \mathrm{d}f_X\, \mathrm{d}f_Y}$$

RÉFÉRENCES

6-1 Duffieux, P. M.: *L'Intégrale de Fourier et ses Applications à L'Optique*, Faculté des Sciences, Besançon, 1946.
6-2 Schade, O. H.: Electro-optical Characteristics of Television Systems, *RCA Rev.*, *IX*, 5 (Part I), 245 (Part II), 490 (Part III), 653 (Part IV) (1948).
6-3 O'Neill, E. L.: *Introduction to Statistical Optics*, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Mass., 1963.
6-4 Françon, M.: *Modern Applications of Physical Optics*, John Wiley & Sons, New York, 1963.
6-5 Linfoot, E. H.: *Fourier Methods in Optical Image Evaluation*, Focal Press Ltd., London, 1964.
6-6 Stroke, G. W.: *An Introduction to Coherent Optics and Holography*, Academic Press, New York, 1966.
6-7 Abbe, Ernst: *Archiv. Mikroskopische Anat.*, **9**:413 (1873).
6-8 Rayleigh, Lord: On the Theory of Optical Images, with Special Reference to the Microscope, *Phil. Mag.*, (5)**42**:167 (1896).
6-9 Beran, M. J., and B. G. Parrent, Jr.: *Theory of Partial Coherence*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J., 1964.
6-10 Mandel, L., and E. Wolf: Coherence Properties of Optical Fields, *Rev. Mod. Phys.*, **37**:231 (1965).
6-11 Glauber, R. J.: Coherent and Incoherent States of the Radiation Field, *Phys. Rev.*, **131**:2766 (1963).
6-12 Schwartz, M.: *Information Transmission, Modulation, and Noise*, McGraw-Hill Book Company, New York, p. 285, 1959.
6-13 Considine, P. S.: Effects of Coherence on Imaging Systems, *J. Opt. Soc. Am.*, **56**:1001 (1966).
6-14 Oliver, B. M.: Sparkling Spots and Random Diffraction, *Proc. IEEE*, **51**:220 (1963).
6-15 Goodman, J. W.: Some Effects of Target-induced Scintillation on Optical Radar Performance, *Proc. IEEE*, **53**:1688 (1965).
6-16 Skinner, T. J.: Surface Texture Effects in Coherent Imaging, *J. Opt. Soc. Am.*, **53**:1350A (1963).
6-17 di Francia, G. Toraldo: Super-Gain Antennas and Optical Resolving Power, *Nuovo Cimento, Suppl.*, (9)**9**:426 (1952).
6-18 Harris, J. L.: Diffraction and Resolving Power, *J. Opt. Soc. Am.*, **54**: 931 (1964).
6-19 Barnes, C. W.: Object Restoration in a Diffraction-Limited Imaging System, *J. Opt. Soc. Am.*, **56**:575 (1966).
6-20 Guillemin, E. A.: *The Mathematics of Circuit Analysis*, John Wiley & Sons, Inc., New York, p. 288, 1949.

CHAPITRE 7

FILTRAGE SPATIAL ET TRAITEMENT OPTIQUE DE L'INFORMATION

Au cours du chapitre précédent, nous avons mis en évidence le grand intérêt que présentent les concepts relatifs aux systèmes linéaires dans l'étude des systèmes formant des images. Cependant, si ces concepts n'étaient utiles que pour effectuer l'analyse des systèmes, ils occuperaient une place bien moins importante en optique moderne que celle qu'ils ont prise aujourd'hui. Leur véritable importance n'apparaît pleinement que lorsqu'on considère leurs très grandes possibilités de *synthèse.*

De nombreux exemples illustrent les avantages que l'on tire de l'application du concept de système linéaire à la synthèse des systèmes optiques. Parmi ces avantages, citons l'amélioration de divers types d'instruments optiques obtenue grâce à des raisonnements effectués dans le domaine des fréquences. Des exemples de ce genre de problèmes sont présentés dans leur contexte historique au paragraphe 7-1.

Il existe d'autres applications aussi importantes qui ne sont pas du domaine de la formation des images proprement dit, mais qui relèvent davantage du domaine général du *traitement de l'information.* De telles applications reposent sur l'aptitude des systèmes optiques à faire subir des transformations linéaires générales aux données d'entrée. Dans certains cas, le traitement simultané d'un très grand nombre de données peut, du fait de ce nombre, multiplier l'efficacité de l'observateur humain. Une transformation linéaire peut en effet jouer un rôle crucial dans la réduction d'une grande quantité de données renseignant sur certains points particuliers de l'information qui intéressent l'observateur. On trouve un exemple de ce type d'application dans l'étude de la reconnaissance des caractères (§ 7-6). Dans d'autres cas, un ensemble de données peut apparaître sous une forme qu'un observateur humain ne peut pas utiliser directement, alors qu'une transformation linéaire de ces données peut les rendre utilisables. On trouvera un exemple de ce type d'application dans l'étude du traitement des données relatives aux antennes à ouverture synthétique (§ 7-7).

L'ensemble du sujet relatif au traitement optique de l'information est trop vaste pour être traité complètement dans un seul chapitre; d'ailleurs il existe déjà plusieurs ouvrages consacrés exclusivement à ce sujet (réf. 7-1, 7-2). Nous n'exposerons que quelques principes généraux en choisissant des exemples pous les illustrer. Nous omettrons donc inévitablement un certain nombre de techniques intéressantes et très utiles; le lecteur intéressé pourra consulter les références pour avoir une vue plus complète du sujet.

7-1. — RAPPEL HISTORIQUE

On peut dire que les techniques de synthèse de Fourier ont commencé avec les premières modifications imposées au spectre d'une image. Des expériences de ce type furent d'abord publiées par Abbe en 1893 (réf. 6-7) et plus tard par Porter en 1906 (réf. 7-3). Dans les deux cas, le but précis de ces expériences fut de vérifier la théorie d'Abbe sur la formation des images en microscopie et d'en rechercher les conséquences. En raison de la beauté et de la simplicité de ces expériences, nous allons les rappeler de façon assez détaillée.

Les expériences de Abbe et Porter. — Les expériences réalisées par Abbe et Porter fournissent une éclatante démonstration du mécanisme par lequel se forment les images cohérentes et même de la plupart des principes fondamentaux de l'analyse de Fourier. La figure 7-1 montre le schéma de principe de ces expériences. On éclaire à

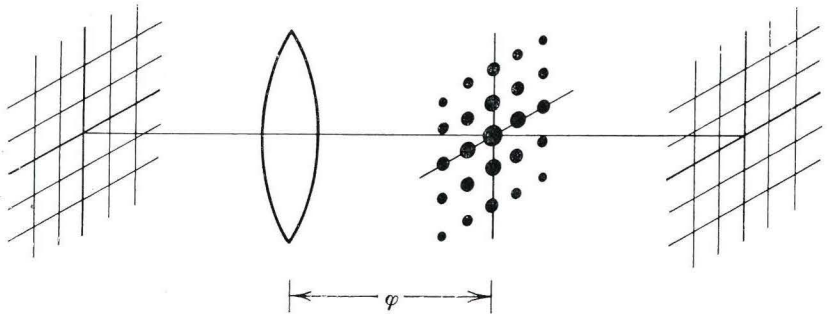
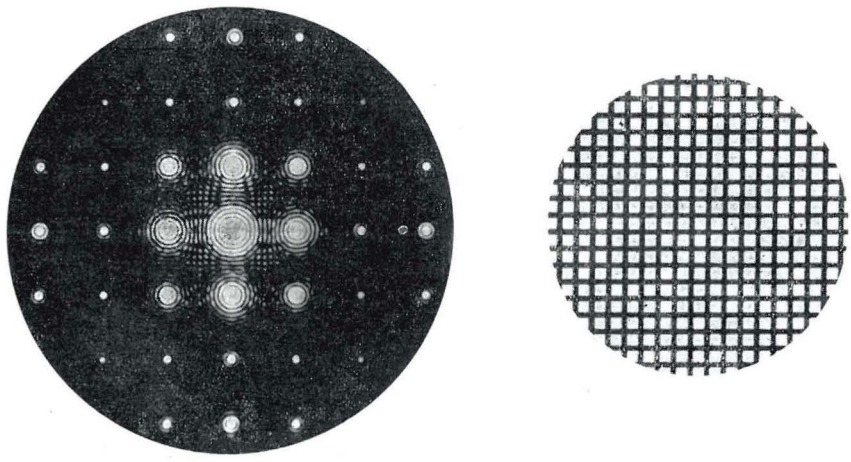


FIG. 7-1. — *L'expérience de Abbe et Porter.*

l'aide d'une source cohérente une grille fine métallique prise comme objet. Dans le plan focal objet d'une lentille apparaît le spectre de Fourier de la grille périodique et finalement dans le plan image, les différentes composantes de Fourier transmises par la lentille se recombinent pour former une réplique de la grille. En plaçant divers obstacles (par exemple un diaphragme à iris, une fente, un petit écran) dans ce plan focal, il est possible de modifier aisément le spectre de l'image de différentes façons.

La figure 7-2*a* montre une photographie du spectre de la grille non modifié. La figure 7-2*b* est l'image correspondante. La nature périodique de l'objet donne dans le plan focal une série de composantes spectrales isolées; chacune d'elles s'étend un peu du fait des dimensions finies de l'ouverture circulaire à l'intérieur de laquelle se trouve la grille. Les spots brillants le long de l'axe horizontal dans le plan focal correspondent aux composantes exponentielles complexes de l'objet qui sont dirigées horizontalement (voir fig. 2-1), les spots brillants situés le long de l'axe vertical correspondant aux composantes exponentielles complexes de l'objet dirigées verticalement. Les spots situés en dehors des axes correspondent aux composantes de l'objet suivant les mêmes angles que dans le plan objet.

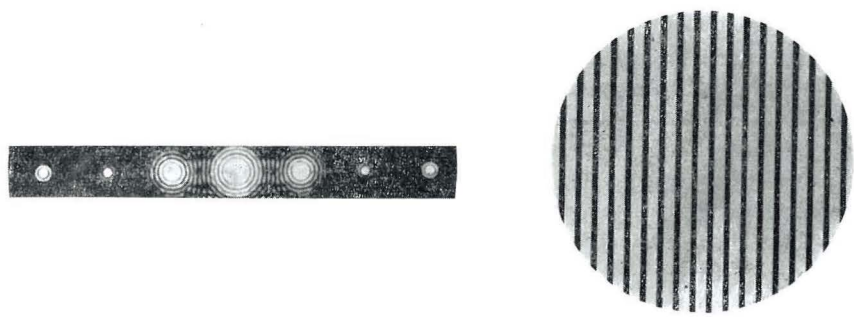
On se rend bien compte de la puissance des méthodes du filtrage spatial en disposant dans le plan focal une fente étroite qui ne laisse passer qu'une seule rangée de compo-



(a) *(b)*

FIG. 7-2. – *a) Spectre non modifié d'une grille. b) Image correspondante.*

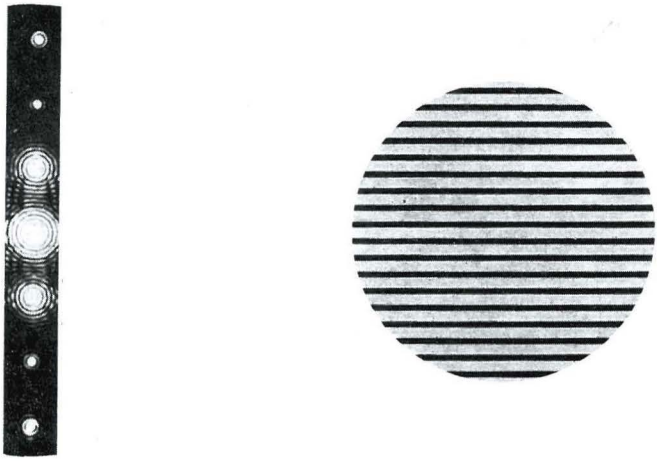
santes spectrales. La figure 7-3*a* représente le spectre transmis quand on utilise une fente horizontale. L'image correspondante que représente la figure 7-3*b* ne contient que la structure verticale de la grille. Ce sont précisément les composantes exponentielles complexes dirigées horizontalement qui contribuent à la structure verticale de l'image. La structure horizontale est pratiquement supprimée.



(a) *(b)*

FIG. 7-3. – *Grille filtrée à l'aide d'une fente horizontale. a) Le spectre; b) l'image.*

Quand on tourne la fente de 90° pour laisser passer la rangée spectrale verticale de la figure 7-4*a*, on voit que l'image ne comporte que la structure horizontale. Par ailleurs, on peut observer d'autres effets intéressants. Par exemple si on place dans le plan focal un diaphragme à iris qui arrête tout sauf la composante de Fourier dirigée suivant l'axe optique, on peut en augmentant progressivement le diamètre du diaphragme montrer la synthèse de Fourier étape par étape. En outre si, une fois le diaphragme à iris enlevé, on place un petit obstacle dans le plan focal sur l'axe de la lentille pour n'arrêter que le spot central c'est-à-dire la composante de fréquence zéro, on peut alors constater dans l'image de la grille un contraste inversé (voir Pb. 7-1).



(a) *(b)*

FIG. 7.4. — *Grille filtrée à l'aide d'une fente verticale. a) Le spectre; b) l'image.*

Le microscope à contraste de phase de Zernike. — De nombreux objets intéressants en microscopie sont fortement transparents c'est-à-dire absorbent peu ou pas du tout de lumière (par exemple une bactérie non colorée). Quand la lumière traverse un tel objet, l'effet qui prédomine est une variation spatiale de la phase; cet effet n'est évidemment pas directement observable avec un microscope classique muni d'un récepteur sensible à l'intensité lumineuse. On connaît depuis longtemps un certain nombre de techniques permettant d'observer de tels objets: citons les techniques interférométriques, *la méthode du champ sombre* dans laquelle un petit obstacle arrête seulement la composante spectrale d'ordre zéro (voir Pb. 7-2) et la *méthode du Schlieren* dans laquelle on supprime toutes les composantes spectrales d'un seul côté de l'ordre zéro central (voir Pb. 7-3). Toutes ces techniques souffrent du fait que les variations de l'intensité observée *ne sont pas* reliées linéairement à la variation de phase et par conséquent ne peuvent pas indiquer directement les variations d'épaisseur de l'objet.

En 1935, Fritz Zernike proposa une nouvelle technique, *le contraste de phase* (réf. 7-4), qui repose sur les principes du filtrage spatial et qui présente l'avantage de relier linéairement (moyennant une hypothèse que l'on précisera) la variation de phase introduite par l'objet à l'intensité observée. L'étude de cette méthode constitue un premier succès des idées de synthèse et pour cette raison nous allons la traiter en détail.

Considérons un objet transparent de transmittance en amplitude:

$$\mathbf{t}(x, y) = \exp\,[j\phi(x, y)] \tag{7-1}$$

éclairé en lumière cohérente et placé dans un système optique. Pour simplifier les calculs, supposons le grandissement égal à l'unité et négligeons le fait que les dimensions des pupilles d'entrée et de sortie du système sont finies. En outre, pour que la variation de phase ϕ et l'intensité soient reliées linéairement, supposons que la phase ϕ soit très inférieure à 1 radian; dans ce cas la transmission en amplitude prend la forme approchée

$$\mathbf{t}(x, y) \cong 1 + j\phi(x, y) \tag{7-2}$$

Nous négligeons ainsi les termes d'ordre 2 et d'ordre plus élevé. Remarquons que le premier terme de (7-2) conduit à une composante de l'onde d'amplitude élevée qui traverse l'objet sans modification, tandis que le second terme donne naissance à une onde diffractée d'amplitude plus faible qui s'écarte de l'axe du système.

L'image produite par un microscope classique peut s'écrire

$$I_i \cong |1+j\phi|^2 \cong 1$$

où ici encore on a négligé le terme ϕ^2. Zernike remarqua que l'onde diffractée n'est pas observable parce qu'elle est en *quadrature de phase* avec le fond continu intense et que si cette quadrature de phase pouvait être modifiée, les deux termes pourraient alors interférer pour produire des variations observables de l'intensité de l'image. Constatant que le fond continu est focalisé sur l'axe dans le plan focal alors que la lumière diffractée contenant les fréquences spatiales les plus élevées s'étend loin du foyer, il proposa de placer dans ce plan focal une lame de phase afin de modifier la différence de phase entre la lumière focalisée et la lumière diffractée.

La lame de phase peut être constituée par un support en verre en un point duquel on a déposé une couche mince d'un diélectrique transparent. Ce point est placé au centre du plan focal; l'épaisseur et l'indice de réfraction de la couche déposée sont tels que le retard de phase de l'onde focalisée soit égal à $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ par rapport l'onde diffractée.

Dans le premier cas l'intensité dans le plan image devient:

$$I_i = \left| \exp\left(j\frac{\pi}{2}+j\phi\right)\right|^2 = |j(1+\phi)|^2 \cong 1+2\phi \tag{7-3}$$

alors que dans le second cas nous avons:

$$I_i = \left| \exp\left(j\frac{3\pi}{2}+j\phi\right)\right|^2 = |-j(1-\phi)|^2 \cong 1-2\phi \tag{7-4}$$

Ainsi l'intensité de l'image est reliée linéairement à la différence de phase ϕ. Quand la phase du fond continu est retardée de $\frac{\pi}{2}$, le résultat (7-3) est appelé *contraste de phase positif* alors qu'un retard de $\frac{3\pi}{2}$ donne un *contraste de phase négatif* (relation 7-4). Il est aussi possible d'améliorer le contraste de l'image en rendant la lame de phase partiellement absorbante (voir problème 7-4).

La méthode du contraste de phase est une technique qui transforme une modulation spatiale de phase en une modulation spatiale d'intensité. Le lecteur spécialisé en électronique notera avec intérêt qu'un an après la proposition de Zernike, E. H. Amstrong (réf. 7-5) proposa une technique absolument semblable pour transformer des signaux électriques modulés en amplitude en signaux modulés en phase. Comme nous l'avons déjà vu au chapitre 6 et comme nous continuerons à le voir dans ce chapitre, l'électronique et l'optique allaient développer des liens de plus en plus étroits au cours des années qui suivirent.

Amélioration des photographies : Maréchal. — Au début des années 50, des chercheurs de l'Institut d'Optique de l'Université de Paris s'engagèrent activement dans l'utilisation des techniques de filtrage optique en lumière cohérente pour améliorer la qualité des photographies. Le plus éminent d'entre eux fut A. Maréchal dont les succès motivèrent un regain d'intérêt dans le domaine du traitement optique de l'information.

Maréchal considéra les défauts qui apparaissent dans les photographies comme provenant de défauts correspondant de la fonction de transfert du système produisant les images. Il en déduisit qu'en plaçant le cliché photographique dans le plan objet d'un second système cohérent et en disposant une lame de phase absorbante convenable dans le plan focal, on pourrait réaliser un *filtre compensateur* permettant de supprimer, au moins partiellement, ces défauts. Même si la fonction de transfert du système optique initial était mauvaise, le produit de cette fonction de transfert par la fonction de transfert du système compensateur pourrait donner une réponse en fréquences plus satisfaisante.

Maréchal et ses collaborateurs réalisèrent différents types d'amélioration de photographies. Par exemple, ils montrèrent qu'il est possible d'accentuer les détails fins dans l'image en affaiblissant simplement les composantes de basses fréquences du spectre de l'objet. L'élimination du flou d'une image constitua aussi un grand succès. Dans ce dernier cas le système optique original était grossièrement défocalisé et produisait une réponse impulsionnelle qui, dans l'approximation de l'optique géométrique, consistait en un cercle lumineux uniforme. La fonction de transfert correspondante était alors de la forme:

$$H(\varrho) \cong 2\,\frac{J_1(\pi a \varrho)}{\pi a \varrho}$$

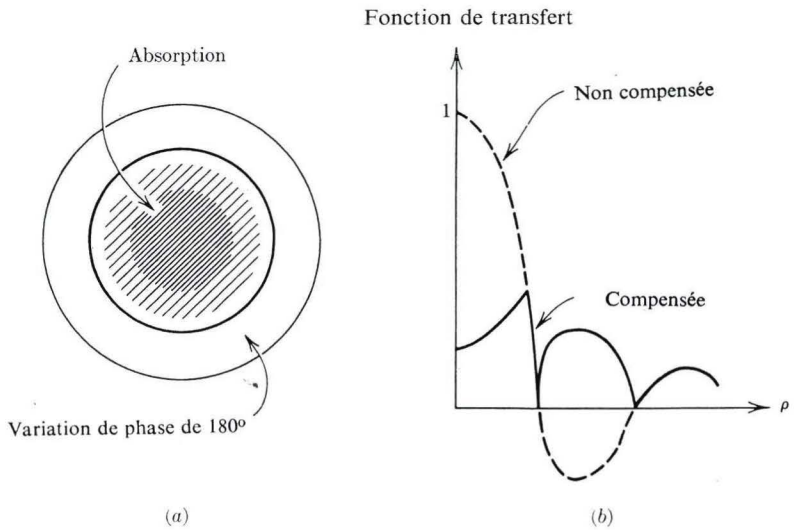


FIG. 7.5. — *Amélioration d'une image floue. a) Le filtre placé dans le plan focal, b) les fonctions de transfert non compensée et compensée.*

où a = constante et $\varrho = \sqrt{f_X^2 + f_Y^2}$. Le filtre compensateur était obtenu en plaçant dans le plan focal du second système optique une lame absorbante et une lame déphasante. La lame absorbante atténuait le pic étalé correspondant aux fréquence les plus basses de H alors que la seconde lame déphasait de 180° son premier lobe négatif. La figure 7-5 représente les fonctions de transfert initiale et compensée.

Ils montrèrent aussi qu'on pouvait supprimer la structure périodique associée au procédé de reproduction des photographies en demi-teinte (comme on le voit par exemple dans les journaux) à l'aide d'un simple filtre spatial. Le procédé de reproduction en demi-teinte est, à bien des égards, analogue aux procédés d'échantillonnage périodique que nous avons vus au paragraphe 2-3. Le spectre d'une photographie imprimée de cette manière possède une structure périodique qui ressemble beaucoup à la figure 2-5. En plaçant un diaphragme à iris dans le plan focal du système de filtrage, il est possible de ne laisser passer que la zone située au voisinage du point de fréquence zéro, et ainsi de supprimer la structure périodique de la photographie tout en laissant passer la totalité de l'image.

L'apparition du point de vue de la théorie des communications[1]. — Vers le début des années 50, il devint évident qu'un échange entre la théorie des communications et l'optique, pourrait être hautement profitable. De nombreux problèmes qui se posaient aux chercheurs en optique présentaient de fortes ressemblances avec les problèmes de filtrage optimal, de détection et d'estimation de la théorie des communications. L'impulsion initiale vers cet échange fut donnée par un théoricien des communications, Peter Elias, et ses collaborateurs, D. S. Grey et D. Z. Robinson avec la publication en 1952 d'un article intitulé «Fourier Treatment of Optical Processes» (réf. 7-6) et à nouveau par Elias avec la publication de l'article «Optics and Communication Theory» (réf. 7-7) en 1953. L'alliance réelle de ces deux points de vue fut réalisée par un physicien E. L. O'Neil, avec la publication de son article «Spatial Filtering in Optics» en 1956 (réf. 7-8) et de manière plus générale grâce à la grande influence qu'eurent ses recherches et son enseignement parmi les spécialistes de l'optique. Les résultats fructueux que le mariage de ces deux disciplines ont apportés et continuent d'apporter, furent confirmés par l'intérêt et la qualité des travaux présentés au symposium intitulé «Communication and Information Theory Aspects of Modern Optics» tenu en 1960 (réf. 7-9).

Depuis ce temps-là, la fusion des deux points de vue est devenue si complète qu'il est parfois difficile de dire si un travail déterminé doit être publié dans une revue d'optique ou dans une revue d'électronique.

Application de l'optique cohérente au traitement le plus général de l'information. — Alors que la début des années 50 fut caractérisé par une prise de conscience grandissante, de la part des physiciens, du fait que certains aspects de l'électronique relèvent de l'optique, la fin des années 50 et le début des années 60 vit une prise de conscience progressive, de la part des électroniciens, du fait que les systèmes de filtrage optique

[1] Nous ne tenterons pas ici de mentionner tout ce qui a contribué initialement à l'alliance des deux points de vue; nous nous limiterons aux références qui présentent le plus d'intérêt pour le lecteur spécialisé en électronique.

pourraient être utilisés avec profit dans leurs problèmes de traitement de l'information les plus généraux. Les possibilités qu'offre le filtrage cohérent furent particulièrement évidentes dans le domaine de traitement des signaux radar et furent exploités très tôt par L. J. Cutrona et ses collaborateurs du Radar Laboratory de l'Université du Michigan. La publication, en 1960, de l'article «Optical Data Processing and Filtering Systems» (réf. 7-10) par l'équipe du Michigan stimula beaucoup l'intérêt de ces techniques à la fois parmi les ingénieurs électroniciens et les physiciens spécialistes de ces questions. Le traitement de l'information recueillie par les antennes synthétiques a constitué l'une des applications les plus fructueuses du filtrage cohérent dans le domaine du radar (réf. 7-11); ce sujet sera traité sommairement au paragraphe 7-7. Une vue d'ensemble de la littérature scientifique depuis le milieu des années 60 montre que les techniques de traitement cohérent ont été appliquées avec succès dans des domaines aussi divers que la spectroscopie de Fourier (réf. 7-12) et l'analyse des ondes sismiques (réf. 7-13) par exemple.

7-2. — LE FILM PHOTOGRAPHIQUE

Le film photographique a été et demeure un composant fondamental des systèmes de traitement optique et de filtrage. Il peut jouer dans le processus de filtrage trois rôles essentiels. Premièrement, il peut servir de milieu grâce auquel les informations sont introduites dans le système optique pour être traitées. Deuxièmement, il peut constituer le milieu servant à réaliser le filtre; par exemple il peut permettre de réaliser, dans le plan des fréquences, les atténuations nécessaire à la synthèse de la fonction de transfert désirée. Troisièmement, il peut permettre d'enregistrer l'information à la sortie du système. Souvent il joue les trois rôles à la fois.

A la place du film photographique on a utilisé, dans des domaines limités, un certain nombre d'autres milieux d'enregistrement. Parmi eux, citons les cellules acoustiques liquides, les huiles déformables, les rubans thermoplastiques, les films et les verres photochromiques. Il est évident que ces milieux prendront de l'importance, mais il est peu probable que le film soit complètement remplacé en tant qu'élément principal des systèmes optiques de traitement de l'information.

Pour ces différentes raisons nous allons étudier brièvement quelques propriétés essentielles du film photographique. Pour une étude plus détaillée, le lecteur pourra consulter les références 7-14 et 7-15.

Le processus physique de l'exposition. — Un film ou une plaque photographique non exposé est généralement constitué par une multitude de grains d'halogénure d'argent très petits, en suspension dans un support de gélatine; la gélatine est collée à son tour sur une «base» stable constituée habituellement par de l'acétate de cellulose pour les films et par du verre pour les plaques. Quand le matériau photosensible est exposé à la lumière, les grains d'halogénure d'argent absorbent l'énergie lumineuse et subissent un changement physique complexe. On constate que les grains qui ont absorbé une quantité suffisante d'énergie contiennent des petits germes d'argent métallique; ces germes sont appelés *centres de développement*. Le film exposé est ensuite soumis au traitement chimique appelé *développement*, durant lequel l'existence

d'un seul petit centre de développement peut provoquer le changement en argent métallique du grain entier d'halogénure d'argent. Les grains qui ne contiennent pas de centres de développement ne subissent pas de transformation. Pour terminer on «fixe» le film en le soumettant à un processus chimique qui élimine les grains d'halogénure d'argent restants, tout en préservant l'argent métallique; ceci évite la transformation ultérieure en argent métallique des grains d'halogénure non réduits. Les grains d'argent sont évidemment fortement opaques dans le domaine des fréquences optiques; l'opacité du film développé ou de la plaque dépendra donc de la densité des grains d'argent dans chaque région du cliché.

Définition des grandeurs photographiques. — La *lumination* E à laquelle est soumis un film ou une plaque est définie comme *l'énergie reçue par unité de surface* en chaque point de la surface photosensible. Si l'intensité de l'onde incidente est représentée[1] par $\mathcal{I}$ et si le temps de pose est égal à T secondes, nous avons:

$$E = \mathcal{I} \cdot T$$

La transmittance en intensité $\tau(x, y)$ du cliché développé est définie par:

$$\tau(x, y) = \text{moyenne locale} \left\{ \frac{I\,[\text{transmise au point } (x, y)]}{I\,[\text{incidente au point } (x, y)]} \right\}$$

où la «moyenne locale» est prise sur une surface grande devant la taille du grain photographique, mais petite devant une surface sur laquelle l'intensité transmise change de manière appréciable.

En 1890, F. Hurter et V. C. Driffield publièrent un article devenu classique dans lequel ils montrèrent que $\log(1/\tau)$ est proportionnel à la masse d'argent par unité de surface du cliché développé. En conséquence, ils définirent la *densité photographique* D par:

$$D = \log\left(\frac{1}{\tau}\right) \tag{7-5}$$

Le graphe de la densité photographique en fonction du logarithme de la lumination constitue le mode de description le plus largement utilisé des propriétés photosensibles du film photographique; il est communément appelé courbe de Hurter-Driffield (ou en abrégé courbe H-D). La figure 7-6 représente un exemple typique d'une courbe H-D relative à un cliché photographique négatif. Quand la lumination est inférieure à une certaine valeur, la densité est indépendante de cette lumination et est égale à une valeur minimale appelée *densité de voile*. Dans le «pied» de la courbe la densité commence à croître lorsque la lumination augmente. Vient ensuite une région de la courbe dans laquelle la densité est proportionnelle au logarithme de la lumination; la pente de la région linéaire de la courbe est appelée le *gamma* (γ) du film. Finalement la courbe atteint un *palier* de saturation et, ici encore, on n'observe aucun changement de densité lorsque la lumination augmente.

---

[1] Nous utiliserons le symbole $\mathcal{I}$ pour désigner les intensités qui interviennent avant et pendant l'exposition et le symbole I pour désigner les intensités qui interviennent après le développement.

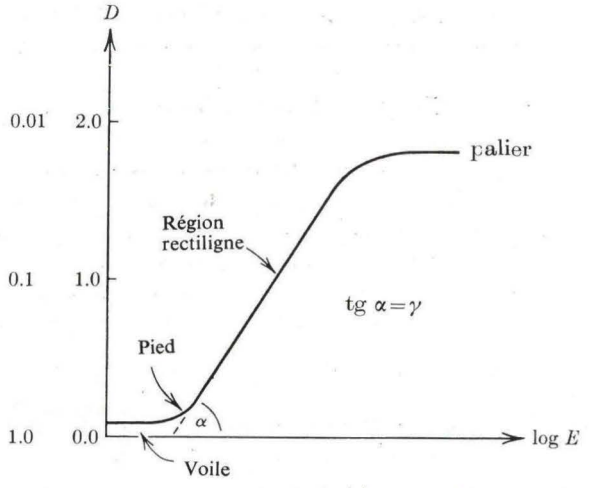


FIG. 7-6. *La courbe de Hurter et Driffield.*

La région linéaire de la courbe H-D est la partie généralement utilisée en photographie habituelle. Un film ayant un γ élevé est appelé film à *fort contraste*, tandis qu'un film ayant un γ faible est appelé film à *faible contraste*. La figure 7-7 représente la courbe H-D pour des films à contrastes faible et fort. La valeur particulière du γ obtenu dépend de trois facteurs principaux:

(1) le type d'émulsion[1] considéré (les films Plus-X et Tri-X sont par exemple des films à faible contraste dont le γ est inférieur ou égal à 1, alors que le film Kodak High Contrast Copy a un γ égal à 2 ou 3;
(2) le révélateur particulier utilisé.
(3) le temps de développement.

La figure 7-8 représente une variation typique de γ en fonction de la durée du déve-

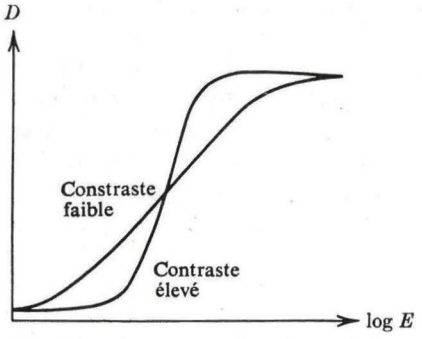


FIG. 7-7. — *Courbes H-D relatives à des films de contraste élevé et de contraste faible.*

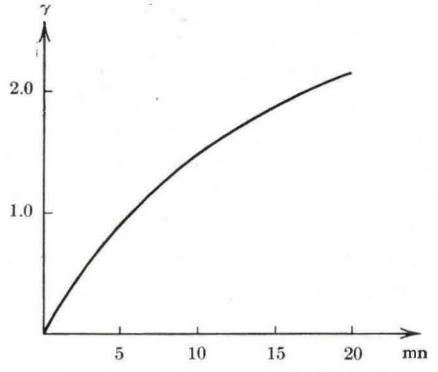


FIG. 7-8. — *Influence de la durée du développement sur le gamma du film.*

[1] Le terme émulsion désigne la partie du film sensible à la lumière, à l'exclusion du support.

loppement. Par un choix judicieux du film, du révélateur et du temps de développement, il est possible de réaliser une valeur donnée de γ avec une bonne précision.

Le film dans un système utilisé en optique incohérente. — Dans bien des cas, le film peut être considéré comme un élément qui transforme une distribution d'intensité $\mathcal{I}$ reçue pendant l'exposition en une distribution en intensité I transmise après développement. Un tel point de vue convient particulièrement bien lorsque le film est utilisé comme élément d'un système fonctionnant en optique incohérente. Nous allons étudier en détail la nature de la transformation ainsi définie.

Si on suppose que le film est utilisé dans la partie linéaire de la courbe H-D, la densité D peut s'écrire:

$$D = \gamma_n \log E - D_0 = \gamma_n \log (\mathcal{I} \cdot T) - D_0 \tag{7-6}$$

où γ_n est la pente de la région linéaire de la courbe et $-D_0$ est la valeur de D à l'intersection du prolongement de la partie linéaire et de l'axe des D. L'indice n dont est affecté γ indique que nous avons affaire à un cliché négatif. L'intensité incidente durant l'exposition peut être reliée à la transmittance en intensité après développement grâce à la définition de la densité photographique:

$$D = \log \left(\frac{1}{\tau_n} \right)$$

Lorsqu'on substitue cette définition dans (7-6), on trouve:

$$\log \tau_n = -\gamma_n \cdot \log (\mathcal{I} T) + D_0$$

ou d'une manière équivalente:

$$\tau_n = 10^{D_0} (\mathcal{I} T)^{-\gamma_n}$$

Finalement

$$\tau_n = K_n \mathcal{I}^{-\gamma_n} \tag{7-7}$$

K_n étant une constante positive. Remarquons que la répartition de l'intensité transmise définie par cette relation est fortement non-linéaire en I pour toute valeur positive du gamma.

On peut aussi obtenir une relation entre l'intensité transmise et l'intensité reçue pendant l'exposition qui ait la forme d'une puissance positive, mais cela exige généralement un processus photographique comportant deux étapes. On réalise d'abord un cliché négatif de façon habituelle. Dans une deuxième étape, la lumière transmise par le cliché négatif est utilisée pour éclairer un second film et le résultat est finalement un cliché positif. Afin d'étudier quantitativement ce processus, écrivons la transmittance du premier cliché, donnée par (7-7):

$$\tau_{n1} = K_{n1} \cdot \mathcal{I}^{-\gamma_{n1}}$$

Si ce cliché est placé en contact avec un second film non exposé et s'il est éclairé avec une intensité I_0, l'intensité reçue par le second film est alors: $\tau_{n1} \cdot I_0$; la transmittance résultante en intensité devient:

$$\tau_p = K_{n2} \cdot (I_0 \cdot \tau_{n1})^{-\gamma_{n2}} = K_{n2} \cdot I_0^{-\gamma_{n2}} \cdot K_{n1}^{-\gamma_{n2}} \cdot \mathcal{I}^{\gamma_{n1} \cdot \gamma_{n2}}$$

ce qui peut s'écrire

$$\tau_p = K_p \cdot \mathcal{I}^{\gamma_p} \tag{7-8}$$

où K_p est une constante positive et où $\gamma_p = \gamma_{n1} \cdot \gamma_{n2}$ est le gamma résultant. Evidemment, ce cliché positif donne une répartition linéaire en intensité si (et seulement si) le gamma résultant est égal à l'unité.

Bien que la transformation linéaire de l'intensité incidente durant l'exposition en intensité transmise après développement ne soit possible que dans des conditions très particulières, on peut montrer néanmoins que le film réalise une transformation linéaire des variations très faibles de l'intensité dans des conditions beaucoup plus larges. Pour plus de détails sur ce point, le lecteur se reportera au problème 7-5.

Le film dans un système utilisé en optique cohérente. — Lorsque le film constitue un élément d'un système *cohérent*, il est plus indiqué de le considérer soit comme un élément qui transforme l'intensité incidente durant l'exposition en amplitude complexe transmise après développement, soit comme un élément qui transforme l'amplitude complexe incidente pendant l'exposition en une amplitude complexe transmise après développement. On ne peut, bien sûr, adopter le second point de vue qu'à la condition que la lumière servant à éclairer le cliché pendant l'exposition soit elle-même cohérente.

Comme l'amplitude complexe de la lumière transmise constitue, dans les deux cas, la grandeur importante dans un système cohérent, il est nécessaire de caractériser le cliché à l'aide de sa transmittance complexe en *amplitude* $\mathbf{t}$. Il est trés tentant de définir $\mathbf{t}$ comme la racine carrée positive de la transmittance en intensité τ. Cependant une telle définition ne tient pas compte des variations relatives de phase qui peuvent se produire quand la lumière traverse le film. De tels changements de phase qui sont dus à des variations de l'épaisseur du film peuvent provenir de deux causes distinctes. D'abord, il existe généralement des variations aléatoires d'épaisseur du support du film, ce qui revient à dire que ce support n'est pas optiquement plan. Ensuite il apparaît que l'épaisseur de l'émulsion varie avec la densité d'argent dans le cliché développé. Cette dernière variation est prépondérante et dépend étroitement des variations de lumination auxquelles le film est soumis. Ainsi, pour caractériser complètement la transmittance en amplitude du film, on doit écrire:

$$\mathbf{t}(x, y) = \sqrt{\tau(x, y)} \exp [j\phi(x, y)] \tag{7-9}$$

où $\phi(x, y)$ traduit la répartition des variations de phase introduites par le cliché.

Dans la plupart des applications, on cherche à éliminer totalement ces variations d'épaisseur car on ne peut pas les contrôler facilement. Il est possible de supprimer les effets de ces variations à l'aide d'un dispositif appelé *cuve à immersion*. Un tel système est constitué par deux lames de verre optiquement planes entre lesquelles on immerge le cliché dans une huile d'indice convenable, comme le montre la figure 7-9.

Le choix de l'indice de réfraction de l'huile est le résultat d'un compromis, car il est impossible de l'adapter simultanément aux différents indices du support du film, de l'émulsion et du verre de la cuve (qui n'a le plus souvent qu'une seule face plane). Cependant, en choisissant une huile convenable, l'épaisseur optique de la cuve à

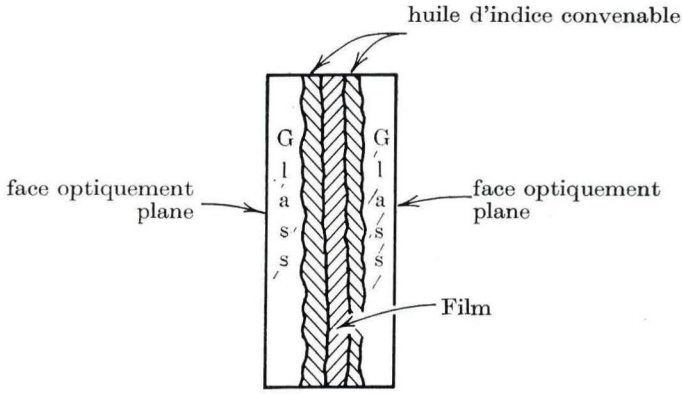


FIG. 7-9. – *Cuve à immersion destinée à éliminer les variations d'épaisseur du film.*

immersion peut être rendue pratiquement constante, ce qui permet d'écrire la transmittance du film et de la cuve sous la forme:

$$\mathbf{t}(x, y) = \sqrt{\tau(x, y)} \tag{7-10}$$

Dans le cas où les variations de phase sont supprimées, la combinaison des expressions (7-10), (7-7) et (7-8) permet d'exprimer la transmittance en amplitude sous la forme:

$$\begin{aligned} &\mathbf{t}_n = k_n \mathcal{J}^{-\gamma_n/2} = k_n \,|\, \mathbf{U} \,|^{-\gamma_n} \quad \text{pour un cliché négatif,} \\ \text{et} \quad &\mathbf{t}_p = k_p \mathcal{J}^{-\gamma_n/2} = k_p \,|\, \mathbf{U} \,|^{\gamma_p} \quad \text{pour un cliché positif.} \end{aligned} \tag{7-11}$$

où $\mathbf{U}$ est l'amplitude complexe du champ incident pendant l'exposition et où $k_n = K_n^{1/2}$, $k_p = K_p^{1/2}$.

Comme on le verra, plus loin, dans de nombreux cas on désire que le film transforme l'amplitude complexe *en le carré* de son module. Une telle condition peut être remplie de plusieurs manières; l'une d'elles consiste à réaliser un cliché positif ayant un gamma résultant (γ_p) égal à 2 comme le montre la relation (7-11). En vue de satisfaire cette condition dans le domaine de validité le plus étendu possible, on choisit le plus souvent le gamma du premier cliché inférieur à l'unité (par exemple $\gamma_{n1} = 1/2$) et celui du second supérieur à 2 (par exemple, $\gamma_{n2} = 4$) de telle sorte que leur produit soit égal à 2.

Il est possible cependant d'obtenir le même résultat, mais sur un domaine limité, avec un cliché de gamma quelconque positif ou négatif. Pour comprendre ceci plus facilement, abandonnons pour caractériser le film la courbe traditionnelle H-D et traçons plutôt, avec une échelle linéaire, le graphe donnant directement la transmittance en amplitude en fonction de la lumination. Une telle description a été préconisée par Maréchal (réf. 7-9 p. 48) et utilisée de façon efficace par Kozma (réf. 7-16) dans l'analyse des effets des non-linéarités photographiques. La figure 7-10 montre le graphe de la transmittance en amplitude en fonction de la lumination (*courbe t-E*) pour un cliché négatif déterminé. Si le film est utilisé en un point de fonctionnement qui se situe dans la région la plus linéaire de la courbe (t-E), le film transformera en leur carré les variations faibles de l'amplitude pourvu qu'au cours de ces variations

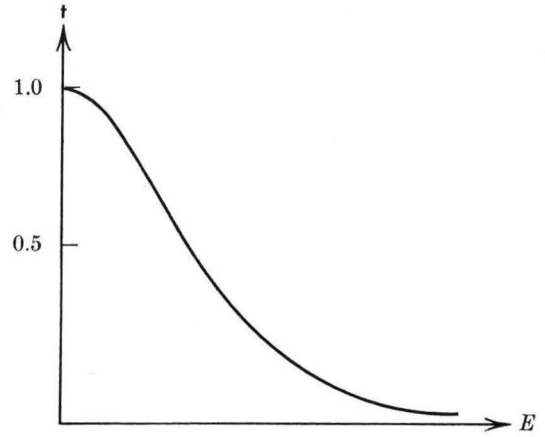


FIG. 7-10. — *Courbe caractéristique transmittance — lumination pour un cliché négatif.*

le point de fonctionnement reste dans un domaine déterminé appelé domaine dynamique. Par suite, si E_b représente la lumination au point de fonctionnement et t_b la transmittance correspondante, nous pouvons représenter la courbe (t-E) dans sa partie linéaire par:

$$\mathbf{t}_n \cong t_b+\beta(E-E_b) = t_b+\beta' |\Delta \mathbf{U}|^2$$

où β est la pente de la courbe au point de fonctionnement où $\Delta\mathbf{U}$ représente les faibles variations d'amplitude et où β' est le produit de β par le temps de pose. Notons que β et β' sont des nombres négatifs pour un cliché négatif.

La figure 7-11 compare les courbes (t-E) pour des films de gamma élevé et de gamma faible. Remarquons que la courbe de gamma élevé a une pente plus raide; par conséquent le film correspondant est plus efficace dans la transformation des faibles variations de lumination en variations de transmittance. Cependant cette efficacité accrue s'accompagne d'une limitation du domaine de lumination dans lequel la

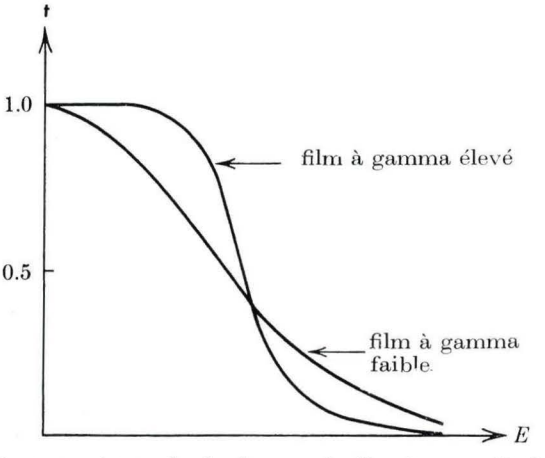


FIG. 7-11. — *Courbes transmittance-lumination pour des films à gamma élevé et à gamma faible*

courbe (t-E) demeure linéaire. Remarquons pour terminer que le point de fonctionnement tel que ce domaine ait une étendue maximale se situe généralement au voisinage du pied de la courbe H-D correspondante.

Le lecteur intéressé par une étude plus détaillée du comportement du film photographique dans des systèmes cohérents consultera les références 7-17 et 7-18.

La fonction de transfert de modulation. — Jusqu'à présent, nous avons supposé implicitement que toutes les variations de lumination, même celles qui ont les périodes spatiales les plus faibles, étaient transformées en variations correspondantes de densité, selon la courbe H-D de l'émulsion. En réalité, l'expérience montre que lorsque la période spatiale des variations de lumination est trop petite, il peut se faire qu'*aucune* variation correspondante de densité n'apparaisse dans le cliché final. Nous pouvons donc dire de façon très générale qu'un film donné présente une réponse fréquentielle limitée.

Comme nous l'avons déjà vu, le comportement du film est généralement non-linéaire, et par suite, associer une fonction de transfert à la transformation qu'il réalise n'a pas de sens. Cependant, les phénomènes physiques qui limitent la réponse fréquentielle sont pour la plupart linéaires (par exemple la diffusion de la lumière dans l'émulsion pendant l'exposition et la diffusion chimique pendant le développement). On peut alors espérer pouvoir séparer le phénomène linéaire qui limite la réponse en fréquence des propriétés non-linéaires. Un tel raisonnement donne en fait d'assez bons résultats dans la plupart des cas. Il convient donc généralement de considérer la transformation produite par le film photographique comme celle que réalise un filtre linéaire spatialement invariant ayant une fonction de transfert déterminée, suivi de ce qu'on appelle un système non-linéaire *sans mémoire* qui a toutes les propriétés examinées dans les paragraphes précédents[1].

Pour évaluer avec précision les caractéristiques de ce filtre linéaire, considérons une lumination sinusoïdale de la forme:

$$E = E_0 + E_1 \cos 2\pi fx \tag{7-13}$$

On définit le taux de modulation de cette lumination par le rapport de l'amplitude des variations de la lumination à sa valeur moyenne soit:

$$M_i = \frac{E_1}{E_0} \tag{7-14}$$

Une fois mesurées les variations de densité du cliché obtenu, on peut se reporter à la courbe H-D du film, qui est connue, pour en déduire la distribution sinusoïdale de la lumination effective comme l'indique la figure 7-12. Le taux de modulation M_{eff} de la distribution de la lumination effective sera toujours inférieur au taux de modulation M_i de la distribution de lumination réelle. Par suite on définit la fonction de transfert de modulation du film par:

$$M_{(f)} = \frac{M_{\text{eff}}(f)}{M_i(f)}$$

[1] L'ensemble filtre linéaire, système non linéaire sans mémoire, second filtre linéaire disposés en cascade constitue une représentation plus précise. Cependant, pour notre étude cette représentation simplifiée suffira.

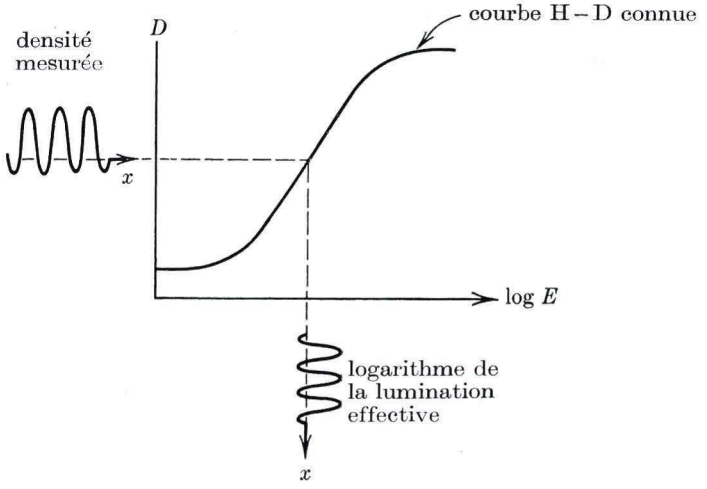


FIG. 7-12. – *Détermination de la distribution de lumination effective.*

où on a précisé que M est fonction de la fréquence spatiale de la lumination. En outre, compte tenu de la forme précise de la fonction d'étalement ou réponse impulsionnelle dans la partie rectiligne de la transformation réalisée par le film, la distribution de lumination effective peut subir un changement de phase $\Omega(f)$ par rapport à la distribution de lumination incidente.

Aussi la réponse en fréquence du film peut-elle être décrite, dans la partie linéaire, par la fonction de transfert complexe:

$$\mathbf{M}(f) = M(f)\exp\,[-j\Omega(f)]$$

La distribution de la lumination effective relative à la partie non-linéaire du film peut par conséquent s'écrire:

$$E = E_0 + M(f)E_1 \cos\,[2\pi fx - \Omega(f)] \tag{7-15}$$

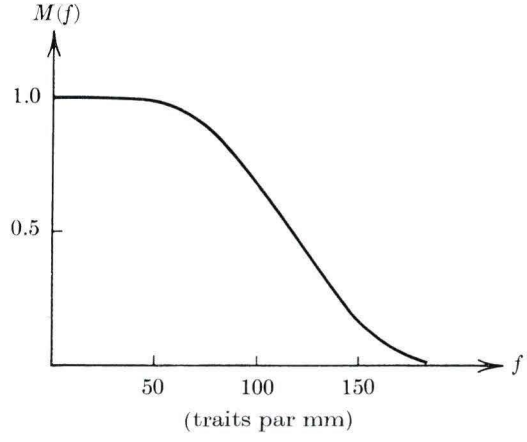


FIG. 7-13. – *Exemple de fonction de transfert de modulation caractéristique d'un film.*

La figure 7-13 représente un exemple typique de la variation de la FTM du film avec la fréquence. Le domaine de fréquences dans lequel on obtient une réponse non nulle varie beaucoup d'un film à l'autre; ce domaine de fréquences dépend de la dimension du grain, de l'épaisseur de l'émulsion et de divers autres facteurs. A titre d'exemples, le film Plus-X donne une réponse non nulle jusqu'à 50 traits par mm environ; quant à la Plaque Spectroscopique Kodak 649 F, elle atteint au moins 2500 traits par mm.

7-3. – SYSTÈMES DE TRAITEMENT EN LUMIÈRE INCOHÉRENTE BASÉS SUR L'OPTIQUE GÉOMÉTRIQUE

Une classe importante de systèmes de traitement optique se caractérise par le fait qu'on peut, en toute confiance, expliquer leur fonctionnement par l'optique géométrique. La plupart de ces systèmes ont été conçus pour être utilisés en éclairage incohérent. Ils sont relativement simples dans leur construction et leur utilisation, mais, comme nous le verrons, cette simplicité est quelquefois obtenue au prix d'une capacité limitée dans le traitement de l'information. Les systèmes que nous allons étudier ne doivent être considérés que comme des illustrations de systèmes d'un type déterminé.

Projection d'images. – L'un des systèmes de traitement optique les plus faciles à concevoir peut être tout simplement basé sur la projection d'images à l'aide de lentilles. Un tel système fut proposé dès 1927 par Emanuel Goldberg de Dresde, en Allemagne, sous forme d'un brevet allemand. Goldberg qui prit un brevet aux Etats-Unis en 1931 (réf. 7-19) entrevit toutes les applications possibles de son invention dans le domaine que l'on appelle aujourd'hui *reconnaissance des caractères*.

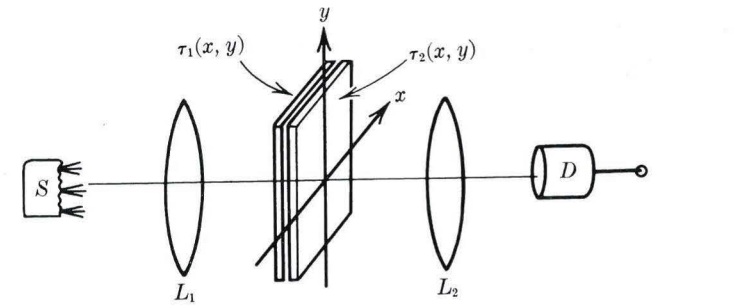
Les principes de base des systèmes à projection d'images sont évidents. Si on forme l'image d'un cliché de transmittance en intensité τ_1 sur un second cliché de transmittance τ_2, l'intensité en chaque point situé à l'arrière du second cliché est proportionnelle au produit $\tau_1\tau_2$. On peut utiliser un détecteur photoélectrique pour mesurer l'intensité *totale* transmise par les deux clichés; il donne un photo-courant I de la forme[1]

$$I = k \int_{-\infty}^{\infty}\int \tau_1(x, y)\, \tau_2(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \qquad (7\text{-}16)$$

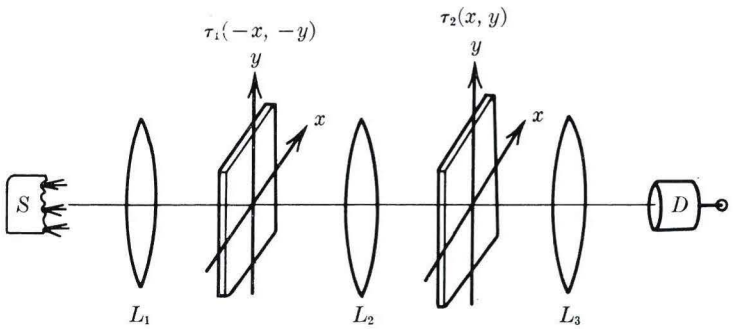
La figure 7-14 montre deux façons de réaliser cette opération. Dans le dispositif (*a*), la lentille L_1 forme une image agrandie de la source S incohérente et uniforme, sur les deux clichés placés en contact étroit. La lentille L_2 forme ensuite, sur le petit photodétecteur D, une image réduite de la distribution de lumière transmise par le cliché de transmittance τ_2. Le photocourant est alors donné par la relation (7-16). Si on doit changer rapidement l'un des clichés ou les deux, la nécessité d'assurer le contact étroit entre les clichés dans la configuration précédente conduit à des difficultés mécaniques.

---

[1] En écrivant que les limites d'intégration sont infinies, nous avons supposé que les dimensions finies des clichés sont incluses dans la définition des transmittances.



(*a*)



(*b*)

FIG. 7-14. *Systèmes réalisant l'intégration (7-16).*

On a donc avantage à séparer les deux clichés, comme le montre la figure 7-14*b*. La lentille L_1 forme ici encore une image agrandie de la source sur le cliché τ_1. La lentille L_2 donne de ce cliché une image dans le plan du cliché τ_2 et la lentille L_3 forme une image réduite de la lumière transmise par le cliché τ_2 sur le détecteur. Notons que le cliché τ_1 doit être disposé «à l'envers» pour compenser le renversement de l'image introduit par L_2. Le photocourant est encore donné par la relation (7-16).

Bien que l'opération representée par l'expression (7-16) soit utile dans un certain nombre d'applications, parmi lesquelles la reconnaissance des caractères, on désire le plus souvent réaliser l'opération, voisine mais plus générale, de convolution. On peut réaliser une convolution à une dimension des fonctions τ_1 et τ_2 avec l'un ou l'autre des systèmes ci-dessus. en déplaçant l'un des clichés avec une vitesse uniforme et en mesurant la réponse du photodétecteur en fonction du temps. Pour préciser, reportons-nous à la figure 7-14*b* et supposons que l'on introduise le cliché de transmittance τ_2 lui aussi à l'envers de telle sorte que l'opération (7-16) devienne:

$$I = k \int_{-\infty}^{\infty}\int \tau_1(x, y)\, \tau_2(-x, -y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Si le cliché τ_2 se déplace dans la direction des x positifs avec une vitesse v la réponse

du détecteur est donnée par:

$$I(t) = k \int_{-\infty}^{\infty}\int \tau_1(x, y)\, \tau_2(vt-x, -y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

Si on effectue des balayages successifs selon la direction x pour différentes valeurs $+y_m$ de y, les réponses du détecteur sont alors:

$$I_m(t) = k \int_{-\infty}^{\infty}\int \tau_1(x, y)\, \tau_2(vt-x, y_m-y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \quad \text{avec} \quad m = 1, 2, 3, \ldots \quad (7\text{-}17)$$

L'ensemble des fonctions $I_m(t)$ représente exactement une convolution bi-dimensionnelle, mais elle est échantillonnée suivant la direction y.

Convolution sans déplacement. — La technique précédente, utilisée pour effectuer des convolutions, est extrêmement peu commode et le balayage mécanique nécessite beaucoup de temps. Il est possible d'effectuer la même opération *sans déplacements relatifs* en modifiant la configuration optique (voir réf. 7-20). Considérons la figure 7-15. Soit S une source étendue située dans le plan focal objet de la lentille L_1.

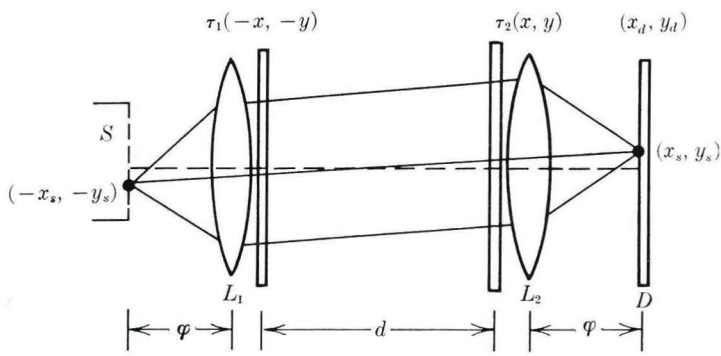


FIG. 7-15. — *Système réalisant une convolution sans déplacement.*

Immédiatement derrière L_1 on place le cliché de transmittance $\tau_1(-x, -y)$. A une distance d du cliché τ_1 et juste en avant de la lentille L_2 on dispose le cliché $\tau_2(+x, +y)$. On mesure alors la distribution d'intensité dans le plan focal image de L_2 à l'aide d'un film par exemple, quoiqu'on puisse aussi utiliser un détecteur électronique tel qu'un vidicon.

Pour comprendre l'opération qu'effectue ce système, considérons tout d'abord un point particulier de la source de coordonnées $(-x_s, -y_s)$. Les rayons provenant de ce point émergent de L_1 et du cliché τ_1 parallèlement entre eux et éclairent le cliché τ_2 avec une distribution d'intensité proportionnelle à $\tau_1\left(-x+\frac{d}{\varphi}x_s, -y+\frac{d}{\varphi}y_s\right)$. Après traversée du cliché τ_2, les rayons sont focalisés sur le détecteur au point de coordonnées (x_s, y_s), en supposant que les deux lentilles ont des distances focales

égales. La distribution d'intensité reçue par le détecteur peut donc s'écrire:

$$I(x_d = x_s,\ y_d = y_s) = k \int_{-\infty}^{\infty}\int \tau_1\left(\frac{d}{\varphi} x_s - x,\ \frac{d}{\varphi} y_s - y\right) \tau_2(x,\ y)\, dx\, dy \qquad (7\text{-}18)$$

qui est la convolution recherchée.

Synthèse d'une réponse impulsionnelle à l'aide d'un système défocalisé. — On peut réaliser la synthèse directe d'une réponse impulsionnelle déterminée en défocalisant un système comme le montre la figure 7-16[1] (réf. 7-21). La lentille L_1 donne ici

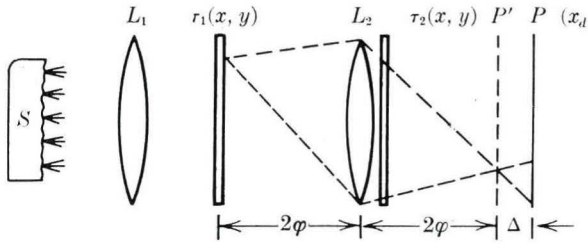


FIG. 7-16. — *Synthèse d'une réponse impulsionnelle à l'aide d'un système défocalisé.*

une image de la source étendue sur le cliché «d'entrée» de transmittance τ_1. La lentille L_2 forme une image du cliché τ_1 dans le plan P'. Pour des raisons de simplicité nous supposerons que le cliché τ_1 et P' sont tous deux distant de 2φ de la lentille L_2 ce qui donne un grandissement unité. Le cliché τ_2 représentant la réponse impulsionnelle recherchée, est placé tout contre L_2; le plan P situé à une distance Δ du plan image P' constitue le plan de sortie du système.

Pour comprendre aisément l'opération effectuée par ce système, déterminons la distribution d'intensité résultante dans le plan P, produite par un point source d'intensité unité situé au point de coordonnées (x, y) du cliché τ_1. Dans l'approximation de l'optique géométrique, les rayons qui ont traversé le cliche τ_2 convergent en un point du plan P' et divergent ensuite pour donner une projection réduite de τ_2 dans le plan P. La projection est centrée au point de coordonnées $\left[x_d = -\left(1+\frac{\Delta}{2\varphi}\right) x,\ y_d = -\left(1+\frac{\Delta}{2\varphi}\right) y\right]$ et le facteur de réduction de τ_2 est $\frac{\Delta}{2\varphi}$. En tenant compte du renversement de τ_2 lors de la projection, la réponse à ce point source s'écrit:

$$|\mathbf{h}(x_d,\ y_d;\ x,\ y)|^2 = k\tau_2\left\{-\frac{2\varphi}{\Delta}\left[x_d + \left(1+\frac{\Delta}{2\varphi}\right)x\right],\ -\frac{2\varphi}{\Delta}\left[y_d + \left(1+\frac{\Delta}{2\varphi}\right)y\right]\right\}$$

L'intensité à la sortie, au point de coordonnées $(-x_d,\ -y_d)$, peut alors prendre la

[1] Ce système est en fait presque identique de celui de la figure 7-15 mais le point de vue est suffisamment différent pour justifier une étude séparée.

forme de l'intégrale de convolution suivante:

$$I(-x_d, -y_d) = k \int_{-\infty}^{\infty}\int \tau_1(x, y)\, \tau_2 \left\{ \frac{2\varphi}{\Delta} \left[x_d - \left(1+\frac{\Delta}{2\varphi}\right) x \right], \frac{2\varphi}{\Delta} \left[y_d - \left(1+\frac{\Delta}{2\varphi}\right) y \right] \right\} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \quad (7\text{-}19)$$

Limitations. — Tous les systèmes basés sur l'optique géométrique et utilisés en optique incohérente sont limités de la même façon: en raison de la nature incohérente de l'éclairage, les données d'entrée et la réponse impulsionnelle ne peuvent être que des distributions non négatives puisque ce sont des intensités lumineuses. Bien qu'il existe des techniques pour réaliser l'équivalent d'une distribution d'intensité négative (voir par exemple la référence 7-21), elles sont le plus souvent difficiles à manier et peu commodes. Il n'y a donc pas de méthode simple et directe pour traiter des entrées à valeurs positives ou négatives par des systèmes ayant des réponses impulsionnelles également positives ou négatives lorsqu'on utilise un éclairage incohérent.

En outre, tous les systèmes reposant sur les principes de l'optique géométrique doivent satisfaire à une même condition: le choix des éléments du système doit être tel que les effets de la diffraction soient complètement négligeables. Cette condition est déjà satisfaite dans le système de la figure 7-14*a* et n'est pas difficile à obtenir avec le système de la figure 7-14*b*. Cependant, les systèmes des figures 7-15 et 7-16 peuvent être loin de remplir cette condition comme nous allons le voir aisément. D'après le problème 2-12, on évalue commodément la complexité d'une fonction donnée à l'aide du produit espace-largeur de bande. Ce produit représente avec une bonne approximation le nombre de points d'information indépendants contenus dans la fonction en question. Pour qu'un système de traitement de l'information soit le plus efficace possible, il doit permettre de traiter les fonctions d'entrée ayant le produit espace-largeur de bande le plus grand possible.

Considérons le système de traitement de la figure 7-15. Pour rendre maximum le produit escape-largeur de bande du système, nous serions tentés de placer le plus possible de points d'information indépendants sur le cliché. Mais, plus la structure spatiale des clichés devient fine, plus la lumière traversant le premier cliché est diffractée et les lois de l'optique géométrique sont de moins en moins satisfaites. La méthode d'analyse que nous avons utilisée devient alors de moins en moins précise. et le signal de sortie s'écarte de plus en plus du résultat recherché.

Un raisonnement semblable s'applique au système de la figure 7-16. Lorsque la structure du second cliché devient de plus en plus fine, la lumière issue d'un point source du cliché τ_1 tombant sur le plan P ressemblera de moins en moins à la projection géométrique de τ_2. Ainsi la méthode d'analyse des performances du système devient imprécise quand le produit espace—largeur de bande des clichés s'élève.

Bien que nous n'ayons considéré que des exemples très particuliers, il apparaît clairement un fait fondamental: si on veut faire passer dans une ouverture de dimension déterminée un grand nombre d'informations, on doit, à la limite tenir compte des effets de la diffraction. Il importe par conséquent de s'assurer, lorsqu'un système a été conçu sur les bases de l'optique géométrique, qu'il est utilisé dans des conditions où les lois de l'optique géométrique s'appliquent effectivement.

7-4. – SYNTHÈSE DANS LE DOMAINE DES FRÉQUENCES

On peut aussi réaliser des opérations de filtrage linéaire en utilisant le *domaine des fréquences* plutôt que le domaine spatial. Dans le cas où l'éclairage est cohérent, on peut effectuer cette opération de filtrage en modifiant simplement la transmittance en amplitude dans le plan focal image d'une lentille réalisant la transformation de Fourier. On a déjà vu des exemples de ce type à propos du filtrage des photographies (Maréchal) et de la microscopie à contraste de phase (Zernike).

Quand on utilise un éclairage incohérent, la synthèse dans le domaine des fréquences est encore possible, car il existe une relation simple d'autocorrélation entre la transmittance en amplitude de la pupille et la fonction de transfert du système. Cependant le système en éclairage incohérent présente deux points faibles. D'une part les fonctions de transfert qui peuvent être directement synthétisées, se limitent à la classe des fonctions d'autocorrélation; autrement dit, seules les réponses impulsionnelles réelles non négatives peuvent être synthétisées. Dans beaucoup d'applications pratiques, on a besoin de synthétiser des fonctions de transfert plus générales. D'autre part, même s'il se trouve que la fonction de transfert désirée corresponde à une réponse impulsionnelle réelle non négative, la fonction pupillaire nécessaire n'est pas unique et il n'existe aucun procédé systématique connu pour trouver la fonction pupille *la plus simple* donnant la fonction de transfert désirée.

Pour ces deux raisons, nous nous bornerons à étudier les systèmes de traitement par utilisation du domaine des fréquences en éclairage cohérent. Cela n'implique pas du tout que le traitement par le domaine de fréquences ne présente jamais d'intérêt quand l'éclairage est incohérent. On peut voir, dans la référence 7-22, un exemple de système incohérent[1] dans lequel on utilise le domaine des fréquences.

Schémas de systèmes utilisés en éclairage cohérent. – Comme les systèmes cohérents sont linéaires pour l'amplitude complexe, ils sont en mesure de réaliser des opérations de la forme:

$$I(x, y) = K \left| \int_{-\infty}^{\infty} \int \mathbf{g}(\xi, \eta)\, \mathbf{h}(x-\xi, y-\eta)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta \right|^2 \tag{7-20}$$

La figure 7-17 présente deux montages possibles réalisant ce type d'opération. Dans le montage (*a*) la lumière provenant d'un point source S est rendue parallèle par une lentille L_1. Le signal à filtrer est placé dans le plan P_1; il se présente sous la forme d'une transmittance en amplitude $\mathbf{g}(x_1, y_1)$. La lentille L_2 réalise la transformation de Fourier de $\mathbf{g}$ en produisant dans P_2 une distribution en amplitude $\mathbf{k}_1 \mathbf{G}\left(\frac{x_2}{\lambda\varphi}, \frac{y_2}{\lambda\varphi}\right)$, $\mathbf{G}$ étant la transformée de Fourier de $\mathbf{g}$ et $\mathbf{k}_1$ une constante complexe[2]. Dans ce plan on place

[1] Ce système utilise aussi de la lumière cohérente dans une première étape, mais seulement pour mettre les grandeurs d'entrée sous une forme particulière qui permette de réaliser les opérations désirées en éclairage incohérent.

[2] Il est évidemment nécessaire de choisir une lentille de dimension suffisante pour que les effets de vignetage soit négligeables (voir Pb. 5-4).

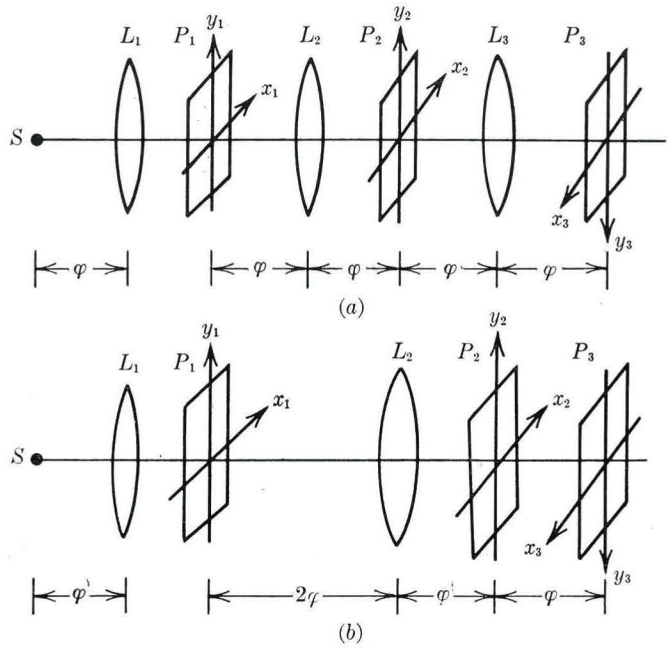


FIG. 7-17. – *Deux configurations possibles pour des systèmes de traitement en optique cohérente.*

un filtre afin de modifier l'amplitude et la phase du spectre **G**. Si **H** représente la transformée de Fourier de **h**, la transmittance en amplitude du filtre fréquentiel doit donc être:

$$\mathbf{t}(x_2, y_2) = \mathbf{k}_2 \mathbf{H}\left(\frac{x_2}{\lambda\varphi}, \frac{y_2}{\lambda\varphi}\right) \tag{7-21}$$

La distribution en amplitude derrière le filtre est alors proportionnelle à **GH**. Enfin, la lentille L_3 transforme cette distribution d'amplitude et la distribution d'intensité dans P_3 s'écrit:

$$I(x_3, y_3) = K \left| \int\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}(\xi, \eta)\, \mathbf{h}(-x_3-\xi, -y_3-\eta)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta \right|^2$$

Les signes négatifs qui précèdent x_3 et y_3 proviennent du renversement du signal de sortie introduit par la succession de deux transformations de Fourier directes au lieu d'une transformation de Fourier directe suivie d'une transformation de Fourier inverse (voir Pb. 2-3*a*). Cette difficulté peut être levée en inversant le sens des axes de coordonnées (x_3, y_3) comme le montre la figure 7-17*a*. Une telle convention, que nous adopterons désormais, permet d'exprimer la distribution en intensité du signal de sortie sous la forme:

$$I(x_3, y_3) = K \left| \int\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{g}(\xi, \eta)\, \mathbf{h}(x_3-\xi, y_3-\eta)\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta \right|^2 \tag{7-22}$$

La figure 7-18 montre une photographie d'un système de traitement optique du type que nous venons de décrire.

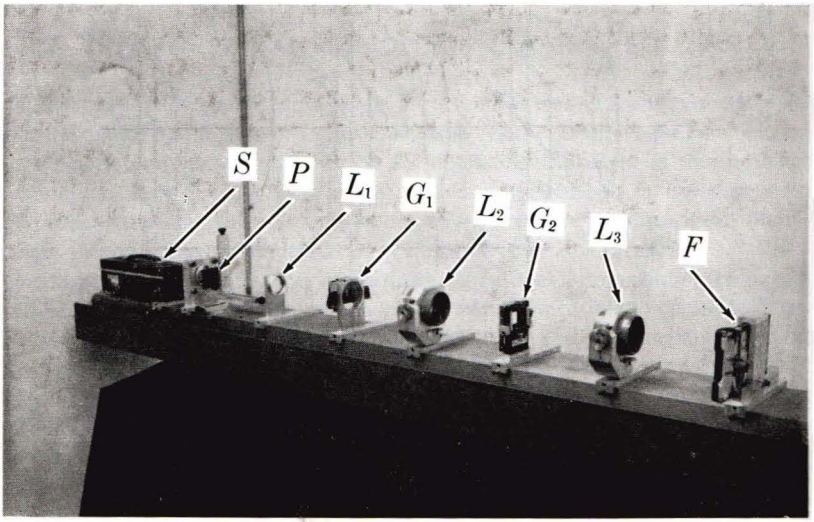


FIG. 7-18. — *Photographie d'un système de traitement en optique cohérente — S, source laser; P filtre spatial; L_1 lentille collimatrice; G_1 cuve à immersion (plan d'entrée); L_2 lentille réalisant la transformation de Fourier; G_2 cuve à immersion (plan spectral); L_3 lentille réalisant la seconde transformation de Fourier; F support du film (plan de sortie).*

La figure 7-17*b* représente un second montage permettant de réaliser la même opération. La lentille L_1 rend parallèle la lumière provenant du point source S. Dans ce cas la lentille L_2 réalise à la fois les opérations de transformation de Fourier et de formation de l'image. La transmittance d'entrée $\mathbf{g}$ est disposée dans le plan P_1 qui, dans ce cas, se trouve à la distance 2φ en avant de la lentille[1] L_2. Dans le plan focal image de la lentille L_2 apparaît le spectre $\mathbf{G}$ multiplié ici par le facteur quadratique de phase $\exp\left[-j\frac{k}{2\varphi}(x_2^2+y_2^2)\right]$ car le signal d'entrée ne se trouve pas dans le plan focal objet de la lentille (voir la relation 6-19). Ici encore, on place dans le plan P_2 le filtre de fréquence de transmittance en amplitude proportionnelle à $\mathbf{H}$. Le plan P_3 est situé à la distance 2φ derrière la lentille; la loi de conjugaison des lentilles est donc satisfaite pour les plans P_1 et P_3. Comme le spectre de l'objet a été multiplié par $\mathbf{H}$ l'intensité dans le plan P_3 est encore donnée par:

$$I(x_3, y_3) = K\left|\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(\xi,\eta)\,\mathbf{h}(x_3-\xi, y_3-\eta)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\right|^2$$

Dans la pratique, le second montage présente deux inconvénients. D'abord, par rapport au système 7-17(*a*), le signal d'entrée dans le système 7-17(*b*) est situé à une distance double de la lentille L_2 qui réalise la transformation de Fourier. Cela signifie que pour une distance focale et une dimension de la fonction d'entrée données l'ouverture de

[1] La distance 2φ n'est pas impérative. Il est seulement nécessaire que la loi de conjugaison des lentilles soit satisfaite pour les plans P_1 et P_2.

la lentille L_2 doit être plus grande pour le système (*b*) que pour le système (*a*) afin de rendre négligeable les effets de vignetage. Un deuxième inconvénient provient de considérations qui conduisent à l'approximation (5-29) dans l'analyse des propriétés d'une lentille relatives à la formation des images en lumière cohérente. Dans cette étude, il apparaissait nécessaire de supposer que l'amplitude en un point donné de l'image était due aux contributions de points de l'objet se trouvant dans une petite région entourant le point géométrique objet. Si l'opération de filtrage représentée par **H** est telle que le produit espace—largeur de bande soit élevé, la réponse impulsionnelle **h** s'étend sur une grande surface; le signal de sortie du système (*b*) doit alors être considéré comme une forme filtrée de la fonction $\mathbf{g}(x_1, y_1) \exp\left[j\frac{k}{4\varphi}(x_1^2+y_1^2)\right]$ plutôt que de la seule fonction $\mathbf{g}(x_1, y_1)$. On ne rencontre pas cette difficulté avec le système (*a*) qui donne une image du *plan* P_1 sur le *plan* P_3 et non l'image d'une sphère sur une autre sphère.

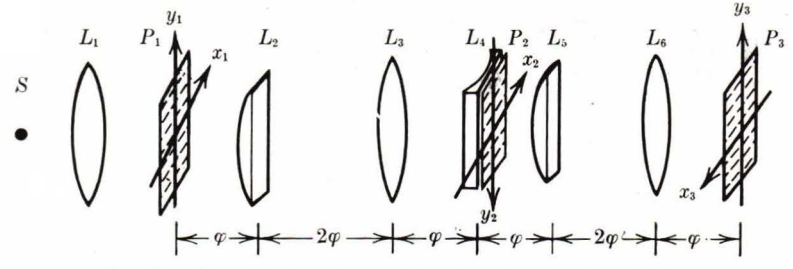


FIG. 7-19. *Exemple de système astigmatique de traitement optique.*

Pour terminer soulignons que les systèmes cohérents sont souvent adaptés au traitement d'un grand nombre de fonctions d'une seule variable plutôt qu'au traitement d'une seule fonction à deux variables indépendantes. La figure 7-19 donne un exemple de système dit *astigmatique*. A la suite de la lentille collimatrice L_1 se trouve le plan d'entrée P_1. Le signal d'entrée est constitué par un ensemble vertical de fonctions transmittance unidimensionnelles chacune s'étendant horizontalement. Une lentille cylindrique L_2 est placée derrière P_1 à la distance focale φ, ses génératrices étant horizontales et perpendiculaires à l'axe optique. A la distance 2φ derrière L_2 on place une lentille sphérique L_3 de même distance focale φ. Le «plan des fréquences» apparaît maintenant en P_2. La combinaison des lentilles L_2 et L_3 réalise une double transformation de Fourier dans la direction des y ce qui donne une image suivant la direction verticale. Comme L_2 n'a aucune action dans la direction des x, la lentille sphérique dans la transformée de Fourier de la dimension horizontale, avec un facteur de phase $\exp\left(-j\frac{k}{\varphi}x_2^2\right)$ dans P_2. Ce facteur de phase peut être éliminé en plaçant une lentille cylindrique divergente de distance focale $\frac{\varphi}{2}$ juste devant P_2; on introduit ainsi un terme de phase

$$t_l(x_2) = \exp\left(j\frac{k}{\varphi}x_2^2\right) \tag{7-23}$$

qui compense le terme de phase précédent. Si le signal d'entrée est constitué par un ensemble de fonctions transmittance $\mathbf{g}_k(x_1)$ avec $k = 1, 2, \ldots K$ il apparaît alors dans P_2 l'ensemble des transformées correspondantes $\mathbf{G}_k(x_2)$ avec $k = 1, 2, \ldots K$ étalées verticalement dans un ordre inverse du fait du renversement de l'image.

On peut alors introduire dans le plan P_2 un ensemble de filtres unidimensionnels. Les deux lentilles L_5 et L_6 donnent de la même façon une image dans la direction y et une transformée de Fourier dans la direction x, conservant ainsi la structure de l'ensemble mais restituant les fonctions individuelles dans le «domaine spatial». Le facteur de phase qui apparaît dans la dernière transformation de Fourier est généralement sans importance.

Limitations. — Bien que les systèmes cohérents soient en général plus souples et aient une capacité de traitement de l'information plus grande que les systèmes incohérents, il existe néanmoins certaines limitations concernant les types d'opérations qu'ils permettent d'effectuer. Nous évoquerons ici les limitations relatives aux systèmes qui réalisent une fonction de transfert déterminée grâce à un contrôle indépendant de l'amplitude et de la phase des transmittances dans le plan des fréquences. Comme nous le verrons au paragraphe 7-5, ces limitations ne concernent pas les techniques plus élaborées de réalisation de masques fréquentiels qui sont basées sur l'enregistrement interférométrique.

Les moyens traditionnels utilisés pour réaliser une fonction de transfert donnée consistent à placer des masques indépendants d'amplitude et de phase dans le plan des fréquences. On agit commodément sur l'amplitude de la transmittance grâce à une plaque photographique qu'on peut plonger dans une cuve à immersion. Pour agir sur la phase de la transmittance on peut utiliser une lame transparente dont l'épaisseur varie de façon appropriée. En général il est difficile de réaliser par cette technique, plus de deux valeurs du retard de phase (par exemple 0° ou 180°). Les lames produisant des variations de phase peuvent être gravées dans un support de la même manière que les réseaux de diffraction ou peuvent être réalisées par des techniques d'évaporation ou des techniques de formation du relief sur films. Toutes ces méthodes sont délicates et ne peuvent être employées de façon satisfaisante que lorsque le masque binaire à réaliser a une forme relativement simple. Des considérations impératives d'ordre pratique limitent ainsi ce procédé à des fonctions de transfert relativement simples. On notera que même si on a besoin d'une réponse impulsionnelle très simple (par exemple la lettre «P») la fonction de transfert correspondante peut être d'une part difficile à calculer analytiquement à l'avance, et d'autre part beaucoup trop compliquée pour être synthétisée par les techniques que nous venons de citer.

Enfin, si on doit filtrer des fonctions d'entrée pour lesquelles le produit espace—largeur de bande est élevé à l'aide d'un système dont la réponse impulsionnelle a elle-même un produit espace—largeur de bande élevé, l'alignement du masque dans le plan des fréquences peut nécessiter une précision extrême (voir Pb. 7-6). Cependant cette difficulté peut le plus souvent être surmontée par l'utilisation de dispositifs micrométriques très précis.

Donc, en résumé, la limitation la plus sérieuse dans l'emploi des systèmes classiques de traitement cohérent provient de la difficulté d'agir simultanément sur l'amplitude et la phase dans le plan des fréquences, sauf si le spectre est très simple. Ce n'est qu'à

partir de 1963, date à laquelle apparurent les filtres de fréquences réalisés par des méthodes interférométriques, qu'on surmonta dans une large mesure cette sérieuse difficulté. Ce nouveau progrès dans le domaine du traitement optique fait l'objet du paragraphe suivant.

7-5. – LE FILTRE DE VANDER LUGT

En 1963, A. B. Vander Lugt du Radar Laboratory de l'Université de Michigan, proposa une nouvelle technique de synthèse des masques fréquentiels destinés aux systèmes de traitement cohérent (réf. 7-23 et 7-24). Les masques ainsi réalisés ont la propriété remarquable de permettre le contrôle efficace à la fois de l'amplitude et de la phase d'une fonction de transfert, bien qu'ils ne soient formés que de diagrammes *purement absorbants*[1]. Grâce à cette technique il est possible de surmonter les deux difficultés les plus sérieuses des systèmes classiques de traitement cohérent.

Réalisation du masque fréquentiel. – Le masque fréquentiel constituant un filtre de Vander Lugt est réalisé à l'aide d'un système interférométrique tel que celui de la figure 7-20. La lentille L_1 sert de collimateur pour la lumière issue de la source ponc-

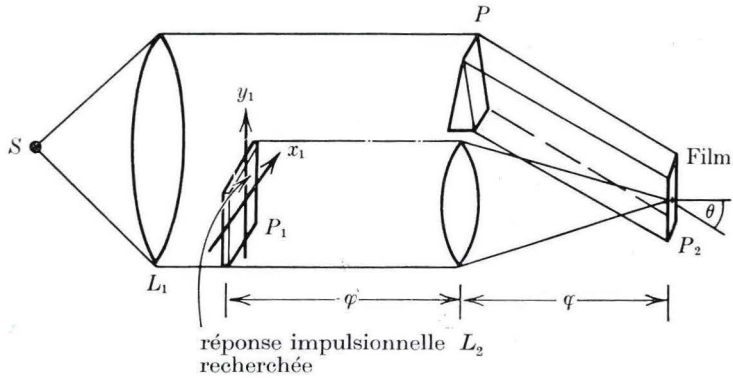


FIG. 7-20. – *Enregistrement du masque fréquentiel d'un filtre de Vander Lugt.*

tuelle S. Une partie de cette lumière tombe sur le masque P_1, qui a une transmittance en amplitude égale à la réponse impulsionnelle désirée **h**. La lentille L_2 réalise la transformation de Fourier de la distribution d'amplitude **h** en donnant sur le film une distribution d'amplitude $\frac{1}{\lambda\varphi}\mathbf{H}\left(\frac{x_2}{\lambda\varphi}, \frac{y_2}{\lambda\varphi}\right)$. Par ailleurs, l'autre partie de la lumière parallèle passe au-dessus du masque P_1, traverse le prisme P et tombe finalement sur le film sous l'incidence θ, comme l'indique la figure.

---

[1] Historiquement, le filtre de Vander Lugt a été précédé par une technique très voisine, connue aujourd'hui sous le nom de *filtre «hard-clipped»*. Pour de tels filtres, le masque fréquentiel était calculé numériquement et non enregistré par une méthode optique. Bien que le filtre «hard clipped» ait été utilisé pour le traitement des signaux radar dès 1961, il n'apparaît dans la littérature qu'en 1965 (réf. 7-25) pour des raisons de classification.

L'intensité incidente totale en chaque point du film est déterminée par l'interférence des deux distributions d'amplitude. L'onde plane inclinée provenant du prisme produit l'amplitude complexe:

$$\mathbf{U}_r(x_2, y_2) = r_0 \exp(-j2\pi\alpha y_2) \tag{7-24}$$

où la fréquence spatiale α est donnée par:

$$\alpha = \frac{\sin\theta}{\lambda} \tag{7-25}$$

La distribution d'intensité totale peut donc s'écrire:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(x_2, y_2) &= \left| r_0 \exp(-j2\pi\alpha y_2) + \frac{1}{\lambda\varphi}\mathbf{H}\left(\frac{x_2}{\lambda\varphi}, \frac{y_2}{\lambda\varphi}\right)\right|^2 \\ &= r_0^2 + \frac{1}{\lambda^2\varphi^2}\left|\mathbf{H}\left(\frac{x_2}{\lambda\varphi}, \frac{y_2}{\lambda\varphi}\right)\right|^2 + \frac{r_0}{\lambda\varphi}\mathbf{H}\left(\frac{x_2}{\lambda\varphi}, \frac{y_2}{\lambda\varphi}\right)\exp(j2\pi\alpha y_2) \\ &\quad + \frac{r_0}{\lambda\varphi}\mathbf{H}^*\left(\frac{x_2}{\lambda\varphi}, \frac{y_2}{\lambda\varphi}\right)\exp(-j2\pi\alpha y_2)\end{aligned} \tag{7-26}$$

Remarquons que si la fonction complexe $\mathbf{H}$ a une distribution d'amplitude A et une distribution de phase ψ, c'est-à-dire si:

$$\mathbf{H}\left(\frac{x_2}{\lambda\varphi}, \frac{y_2}{\lambda\varphi}\right) = A\left(\frac{x_2}{\lambda\varphi}, \frac{y_2}{\lambda\varphi}\right)\exp\left[-j\psi\left(\frac{x_2}{\lambda\varphi}, \frac{y_2}{\lambda\varphi}\right)\right]$$

l'expression de $\mathcal{I}$ peut alors de mettre sous la forme:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(x_2, y_2) &= r_0^2 + \frac{1}{\lambda^2\varphi^2}A^2\left(\frac{x_2}{\lambda\varphi}, \frac{y_2}{\lambda\varphi}\right) \\ &\quad + \frac{2r_0}{\lambda\varphi}A\left(\frac{x_2}{\lambda\varphi}, \frac{y_2}{\lambda\varphi}\right)\cos\left[2\pi\alpha y_2 - \psi\left(\frac{x_2}{\lambda\varphi}, \frac{y_2}{\lambda\varphi}\right)\right]\end{aligned} \tag{7-27}$$

Cette forme montre comment le procédé interférométrique permet d'enregistrer une fonction complexe $\mathbf{H}$ sur un détecteur sensible à l'intensité: l'information relative à l'amplitude et à la phase est enregistrée sous forme d'une modulation d'amplitude et de phase d'une *onde porteuse de haute fréquence* qui est introduite par l'onde de «référence» inclinée provenant du prisme.

Il existe évidemment d'autres systèmes optiques qui permettent de réaliser même distribution d'intensité (7-27). La figure 7-21 indique deux autres possibilités. Le système (a) est un interféromètre de Mach-Zehnder modifié. En inclinant le miroir M_1, on produit une onde plane inclinée dans le plan P_2. Dans le bras inférieur de l'interféromètre, la lentille L_2 réalise ici encore la transformation de Fourier de la réponse impulsionnelle désirée. La deuxième lame semi-réfléchissante permet de superposer ces deux ondes dans le plan du film.

Le système (b), qui est un interféromètre de Rayleigh modifié, fournit un troisième moyen pour réaliser la même distribution d'intensité (réf. 7-2, p. 128). La lentille

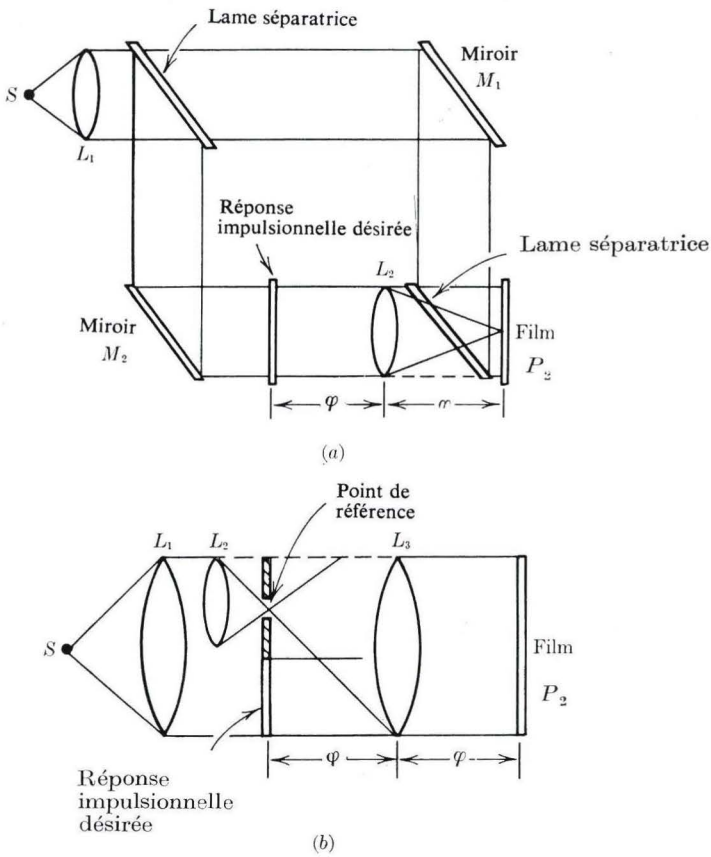


FIG. 7-21. — *Deux systèmes permettant de réaliser des masques fréquentiels: (a) Interféromètre de Mach-Zehnder modifié. (b) Interféromètre de Rayleigh modifié.*

collimatrice L_1 est suivie d'une lentille plus petite L_2 qui focalise une partie de la lumière parallèle en un spot brillant située dans le plan focal objet de la lentille L_3. Lorsque l'onde sphérique issue de ce «point de référence» passe à travers L_3, elle donne naissance à une onde plane inclinée qui tombe sur le film. La lentille L_3 réalise aussi la transformation de Fourier de l'amplitude transmise par le masque matérialisant la réponse impulsionnelle. Ainsi on obtient encore, dans le plan du film la distribution d'intensité (7-27).

Pour terminer la réalisation du masque fréquentiel, on développe le film exposé de telle sorte que sa transmittance en amplitude soit proportionnelle à la distribution d'intensité reçue au cours de l'exposition. Ainsi:[1]

$$\mathbf{t}(x_2, y_2) \propto r_0^2 + \frac{1}{\lambda^2\varphi^2} |\mathbf{H}|^2 + \frac{r_0}{\lambda\varphi} \mathbf{H} \exp(j2\pi\alpha y_2) + \frac{r_0}{\lambda\varphi} \mathbf{H}^* \exp(-j2\pi\alpha y_2) \qquad (7\text{-}28)$$

[1] Rappelons que le symbole $\propto$ indique la proportionnalité.

Remarquons que, mise à part l'exponentielle complexe, le troisième terme de la transmittance est proportionnel à $\mathbf{H}$ et possède donc exactement la forme requise pour la réalisation d'un filtre de réponse impulsionnelle $\mathbf{h}$. Il reste à démontrer comment on peut utiliser ce terme particulier de la transmittance et comment on peut éliminer les autres termes.

Traitement des données d'entrée. — Une fois le masque fréquentiel réalisé, on peut l'introduire dans le système classique de traitement schématisé précédemment sur la figure 7-17*a*. Si la fonction d'entrée que l'on se propose de filtrer est $\mathbf{g}(x_1, y_1)$, la distribution d'amplitude tombant sur le masque situé dans le plan des fréquences est donnée par: $\frac{1}{\lambda\varphi}\mathbf{G}\left(\frac{x_2}{\lambda\varphi}, \frac{y_2}{\lambda\varphi}\right)$. L'amplitude $\mathbf{U}_2$ du champ transmis par le masque s'écrit donc:

$$\mathbf{U}_2 \propto \frac{r_0^2\mathbf{G}}{\lambda\varphi} + \frac{1}{\lambda^3\varphi^3}|\mathbf{H}|^2\,\mathbf{G} + \frac{r_0}{\lambda^2\varphi^2}\mathbf{HG}\exp(j2\pi\alpha y_2) + \frac{r_0}{\lambda^2\varphi^2}\mathbf{H}^*\mathbf{G}\exp(-j2\pi\alpha y_2)$$

La dernière lentille L_3 de la figure 7-17*a* réalise la transformation de Fourier de $\mathbf{U}_2$ (ainsi que la multiplication par $\lambda\varphi$). En tenant compte du changement de sens des axes de coordonnées dans P_3, l'amplitude du champ dans ce plan prend la forme:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_3(x_3, y_3) \propto\ & r_0^2\mathbf{g}(x_3, y_3) + \frac{1}{\lambda^2\varphi^2}[\mathbf{h}(x_3, y_3) * \mathbf{h}^*(-x_3, -y_3) * \mathbf{g}(x_3, y_3)] \\ & + \frac{r_0}{\lambda\varphi}[\mathbf{h}(x_3, y_3) * \mathbf{g}(x_3, y_3) * \delta(x_3, y_3+\alpha\lambda\varphi)] \\ & + \frac{r_0}{\lambda\varphi}[\mathbf{h}^*(-x_3, -y_3) * \mathbf{g}(x_3, y_3) * \delta(x_3, y_3-\alpha\lambda\varphi)]\end{aligned} \tag{7-29}$$

Le troisième terme de cette expression présente un intérêt particulier. En remarquant que:

$$\mathbf{h}(x_3, y_3) * \mathbf{g}(x_3, y_3) * \delta(x_3, y_3+\alpha\lambda\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{h}(x_3-\xi, y_3+\alpha\lambda\varphi-\eta)\,\mathbf{g}(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta \tag{7-30}$$

on voit que ce terme du signal de sortie donne le produit de convolution de $\mathbf{h}$ par $\mathbf{g}$ centré au point de coordonnées $(0, -\alpha\lambda\varphi)$ du plan P_3.

En vue d'une étude ultérieure, écrivons le quatrième terme de (7-29) sous la forme:

$$\mathbf{h}^*(x_3, y_3) * \mathbf{g}(x_3, y_3) * \delta(x_3, y_3-\alpha\lambda\varphi) = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(\xi, \eta)\,\mathbf{h}^*(\xi-x_3, \eta-y_3+\alpha\lambda\varphi)\,d\xi\,d\eta \tag{7-31}$$

qui représente le *produit d'intercorrélation* de $\mathbf{g}$ par $\mathbf{h}$ centré au point de coordonnées $(0, \alpha\lambda\varphi)$ du plan P_3.

Notons que les deux premiers termes de la relation (7-29) qui n'ont pas d'intérêt particulier pour les opérations habituelles de filtrage, sont centrés à l'origine des

coordonnées (x_3, y_3) du plan P_3. Ainsi, il apparaît clairement que si la «fréquence porteuse» α a une valeur suffisamment élevée, c'est-à-dire si l'onde de référence fait un angle suffisamment grand avec l'axe du système, les termes de convolution et d'intercorrélation s'écarteront suffisamment de l'axe dans des directions opposées pour pouvoir être examinés séparément. Pour observer le résultat du produit de convolution de **h** par **g**, il suffit que l'observateur examine la distribution de lumière centrée au point de coordonnées $(0, -\alpha\lambda\varphi)$. Autour du point de coordonnées $(0, \alpha\lambda\varphi)$ l'observateur peut observer le produit d'intercorrélation de **h** par **g**.

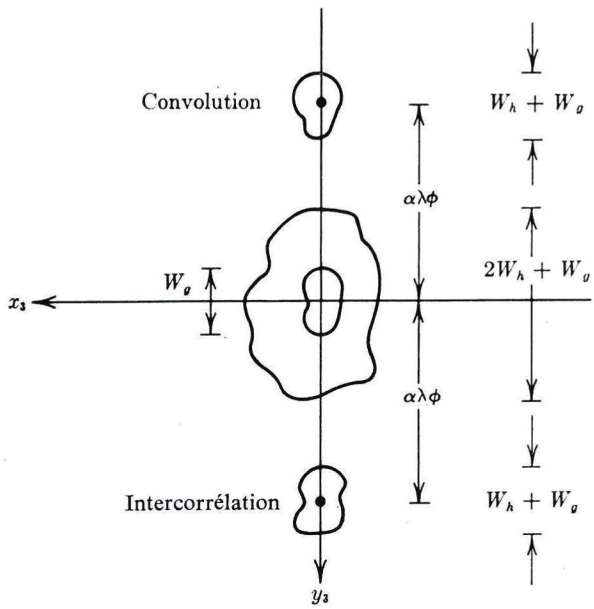


FIG. 7-22. – *Localisation des différents termes du signal de sortie.*

Pour préciser les hypothèses relatives à α, considérons les largeurs des différents termes du signal de sortie représentés sur la figure 7-22. Si la largeur maximale de **h** dans la direction y est W_h et si celle de **g** est W_g, les largeurs des différents termes sont alors les suivantes:

1. $r_0^2 \mathbf{g}(x_3, y_3) \rightarrow W_g$

2. $\dfrac{1}{\lambda^2\varphi^2}[\mathbf{h}(x_3, y_3) \ast \mathbf{h}^*(-x_3, -y_3) \ast \mathbf{g}(x_3, y_3)] \rightarrow 2W_h + W_g$

3. $\dfrac{r_0}{\lambda\varphi}[\mathbf{h}(x_3, y_3) \ast \mathbf{g}(x_3, y_3) \ast \delta(x_3, y_3 + \alpha\lambda\varphi)] \rightarrow W_h + W_g$

4. $\dfrac{r_0}{\lambda\varphi}[\mathbf{h}^*(-x_3 - y_3) \ast \mathbf{g}(x_3, y_3) \ast \delta(x_3, y_3 - \alpha\lambda\varphi)] \rightarrow W_h + W_g$

La figure montre clairement que l'on obtiendra une séparation complète si:

$$\alpha > \frac{1}{\lambda\varphi}\left(\frac{3W_h}{2}+W_g\right)$$

soit:

$$\theta > \frac{3}{2}\frac{W_h}{\varphi}+\frac{W_g}{\varphi} \tag{7-32}$$

dans le cas où l'angle utilisé est petit ($\sin\theta \cong \theta$).

Les avantages du filtre de Vander Lugt. — L'utilisation d'un filtre de Vander Lugt permet de surmonter les deux difficultés les plus importantes qui apparaissent avec les systèmes classiques de traitement cohérent. D'abord, on évite la recherche laborieuse et mathématiquement compliquée d'une fonction de transfert correspondant à une réponse impulsionnelle déterminée; la transformation de Fourier de la réponse impulsionnelle est obtenue *optiquement* par le système qui réalise le masque fréquentiel. Ensuite la fonction de transfert à valeurs complexes, généralement compliquée, est obtenue à l'aide d'un simple masque *absorbant*; on évite ainsi le contrôle de la phase du masque fréquentiel qui était une opération compliquée. Le masque absorbant est simplement plongé dans une cuve à immersion pour éliminer toute variation relative de phase.

Le filtre de Vander Lugt demeure très sensible au positionnement exact du masque fréquentiel, mais guère plus que les systèmes cohérents classiques de traitement de l'information. L'enregistrement de l'onde porteuse de haute-fréquence modulée nécessite l'emploi d'un film ayant un pouvoir de résolution plus élevé que celui des films qu'on utilise ordinairement pour réaliser les masques; comme on dispose de films ayant un pouvoir de résolution suffisant (par exemple, les Plaques Spectroscopiques Kodak) cela ne pose pas de problème particulier.

Notons que la technique de Vander Lugt apporte une très grande souplesse aux systèmes de traitement optique cohérents. Alors que la réalisation du masque fréquentiel constituait auparavant le problème pratique majeur, les difficultés sont à présent transférées dans le domaine spatial. Ces difficultés sont en général beaucoup moins sérieuses, car les réponses impulsionnelles recherchées sont souvent simples et les masques nécessaires peuvent être réalisés par les techniques photographiques classiques. Ainsi le filtre de Vander Lugt permet d'étendre l'utilisation des systèmes de traitement cohérents à des domaines nouveaux jusqu'alors inaccessibles. Un grand nombre d'applications du traitement cohérent, parmi les plus prometteuses, se situent dans ces nouveaux domaines.

7-6. — APPLICATION A LA RECONNAISSANCE DES CARACTÈRES

La *reconnaissance des caractères* constitue une application particulière du traitement optique à laquelle on s'est intéressé depuis plusieurs années. Comme nous le verrons, cette application constitue un excellent exemple de cas où les opérations

de traitement ont des réponses impulsionnelles simples, mais pas nécessairement des fonctions de transfert simples. La technique de synthèse de Vander Lugt est donc particulièrement bien adaptée à cette application.

Le filtre adapté. — Le concept de *filtre adapté* joue un rôle important dans les problèmes de reconnaissance des caractères. Par définition, un filtre linéaire spatialement invariant est dit adapté au signal particulier $\mathbf{s}(x, y)$ si sa réponse impulsionnelle $\mathbf{h}(x, y)$ est donnée par:

$$\mathbf{h}(x, y) = \mathbf{s}^*(-x, -y) \tag{7-33}$$

Si on applique un signal d'entrée $\mathbf{g}(x, y)$ à un filtre adapté à $\mathbf{s}(x, y)$, on trouve un signal de sortie $\mathbf{v}(x, y)$ de la forme:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}(x, y) &= \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{h}(x-\xi, y-\eta)\,\mathbf{g}(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(\xi, \eta)\,\mathbf{s}^*(\xi-x, \eta-y)\,d\xi\,d\eta\end{aligned} \tag{7-34}$$

où l'on reconnaît le produit d'intercorrélation des fonctions $\mathbf{g}$ et $\mathbf{s}$.

Historiquement, la notion de filtre adapté est d'abord apparue dans le domaine de la détection des signaux; si on a à détecter un signal de forme connue, noyé dans un bruit «blanc», l'utilisation d'un filtre adapté permet de réaliser une opération linéaire qui rend maximal le rapport de la puissance instantanée du signal (à un instant donné) à la puissance moyenne du bruit (réf. 7-26). Cependant, dans l'application présente, les caractères seront supposés ne pas contenir de bruit, et l'utilisation d'un mode particulier de filtrage se justifie différemment.

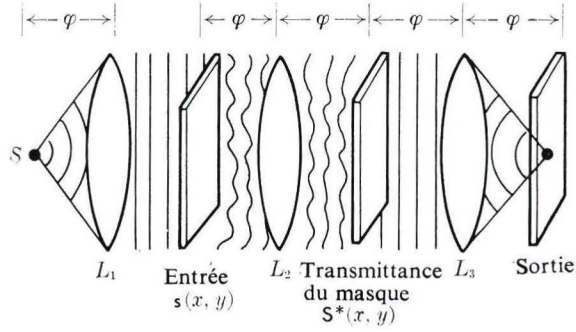


FIG. 7-23. — *Interprétation optique du filtrage adapté.*

L'interprétation optique donnée par la figure 7-23 permet de mieux comprendre le mécanisme du filtrage adapté. Supposons que l'on ait à réaliser un filtre *adapté* au signal d'entrée $\mathbf{s}(x, y)$ au moyen d'un masque fréquentiel disposé dans le plan spectral d'un système classique de traitement cohérent. La transformation de Fourier de la réponse impulsionnelle (7-33) montre que la fonction de transfert nécessaire est:

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y) = \mathbf{S}^*(f_X, f_Y) \tag{7-35}$$

où $\mathbf{H} = \mathcal{F}\{\mathbf{h}\}$ et $\mathbf{S} = \mathcal{F}\{\mathbf{s}\}$. Le masque fréquentiel doit donc avoir une transmittance en amplitude proportionnelle à $\mathbf{S}^*$.

Considérons à présent la nature particulière de l'amplitude de l'onde transmise par le masque lorsqu'on applique le signal **s** (auquel le filtre est adapté) à l'entrée du système. Ce masque reçoit une amplitude complexe proportionnelle à **S** et transmet une distribution proportionnelle à $\mathbf{SS}^*$. Cette dernière quantité est *réelle*, ce qui implique que le masque fréquentiel compense exactement la courbure de l'onde incidente **S**. L'amplitude complexe transmise représente donc une onde plane que la dernière lentille du système transforme en une tache brillante dans le plan de sortie du système. Lorsqu'on applique un signal d'entrée autre que $\mathbf{s}(x, y)$, la courbure de l'onde *n'est pas*, en général, compensée par le masque fréquentiel et la lumière transmise *n'est plus* concentrée en une tache brillante par la dernière lentille. On conçoit alors qu'on puisse détecter la présence du signal **s** en mesurant l'intensité lumineuse dans le plan focal de la dernière lentille du système. (Si le signal d'entrée **s** n'est pas centré à l'origine, la tache brillante dans le plan de sortie se déplace d'une distance égale à la distance du centre du signal **s** à l'axe; cf. Pb. 7-7).

Exemple de problème de reconnaissance de caractères. — Considérons le problème particulier suivant: le signal d'entrée **g** du système de traitement et constitué par l'un quelconque de N caractères possibles $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \ldots \mathbf{s}_N$ et on se propose de déterminer lequel de ces caractères constitue effectivement le signal **g**. Comme nous allons le montrer, le processus d'identification peut être réalisé en appliquant le signal d'entrée à une série de N filtres, chacun d'eux étant adapté à l'un des caractères pouvant constituer le signal d'entrée.

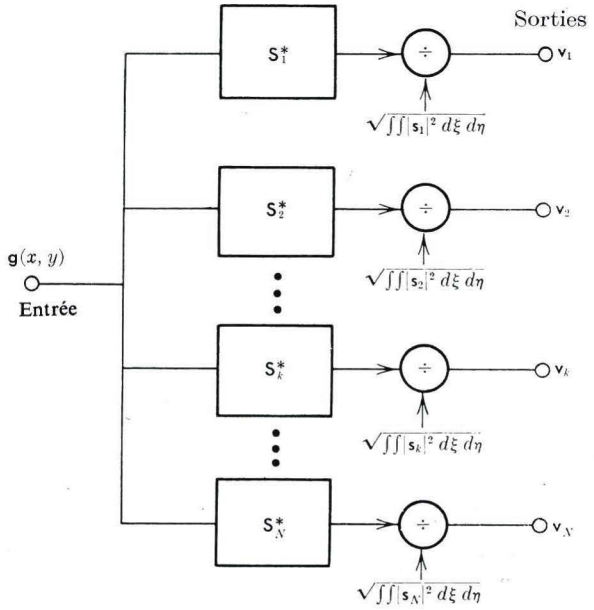


FIG. 7-24. — *Schéma-bloc d'un système de reconnaissance des caractères.*

La figure 7-24 représente un schéma-bloc d'un dispositif de reconnaissance. Le signal d'entrée est appliqué simultanément (ou successivement) aux N filtres adaptés de fonctions de transfert $\mathbf{S}_1^*, \mathbf{S}_2^* \ldots \mathbf{S}_N^*$. La réponse à chacun des filtres est normalisée par la racine carrée de l'énergie totale correspondant au caractère auquel il est adapté. Cette normalisation, qui peut être réalisée par voie électronique après détection des signaux sortant des filtres, tient compte du fait que les divers caractères servant de signal d'entrée ne laissent généralement pas passer la même énergie. Enfin, on compare les carrés des modules des signaux de sortie $|\mathbf{V}_1|^2$, $|\mathbf{V}_2|^2$, ..., $|\mathbf{V}_N|^2$ en chacun des points où on pense trouver les maxima des signaux de sortie (on suppose ainsi que le caractère auquel ils sont adaptés est présent dans chaque cas). Nous allons montrer maintenant que, si le caractère particulier $\mathbf{s}_k$ est effectivement présent dans le signal d'entrée, c'est-à-dire si $\mathbf{g}(x, y) = \mathbf{s}_k(x, y)$, la valeur $|\mathbf{V}_k|^2$ correspondante est la plus élevée des N réponses.

En effet, notons d'abord que, d'après la relation (7-34), le maximum du signal de sortie $\mathbf{V}_k$ du filtre adapté qui convient est donné par:

$$|\mathbf{V}_k|^2 = \frac{\left[\int\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{s}_k|^2 \, d\xi \, d\eta\right]^2}{\int\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{s}_k|^2 \, d\xi \, d\eta} = \int\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{s}_k|^2 \, d\xi \, d\eta \tag{7-36}$$

D'autre part, la réponse $|\mathbf{V}_n|^2$ avec $n \neq k$, d'un filtre adapté à un caractère différent de s_k est donnée par:

$$|\mathbf{V}_n|^2 = \frac{\left[\int\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{s}_k \mathbf{s}_n^* \, d\xi \, d\eta\right]^2}{\int\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{s}_n|^2 \, d\xi \, d\eta} \tag{7-37}$$

En utilisant l'inégalité de Schwarz, nous pouvons écrire:

$$\left| \int\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{s}_k \mathbf{s}_n^* \, d\xi \, d\eta \right|^2 \leqslant \int\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{s}_k|^2 \, d\xi \, d\eta \int\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{s}_n|^2 \, d\xi \, d\eta$$

On en déduit aisément:

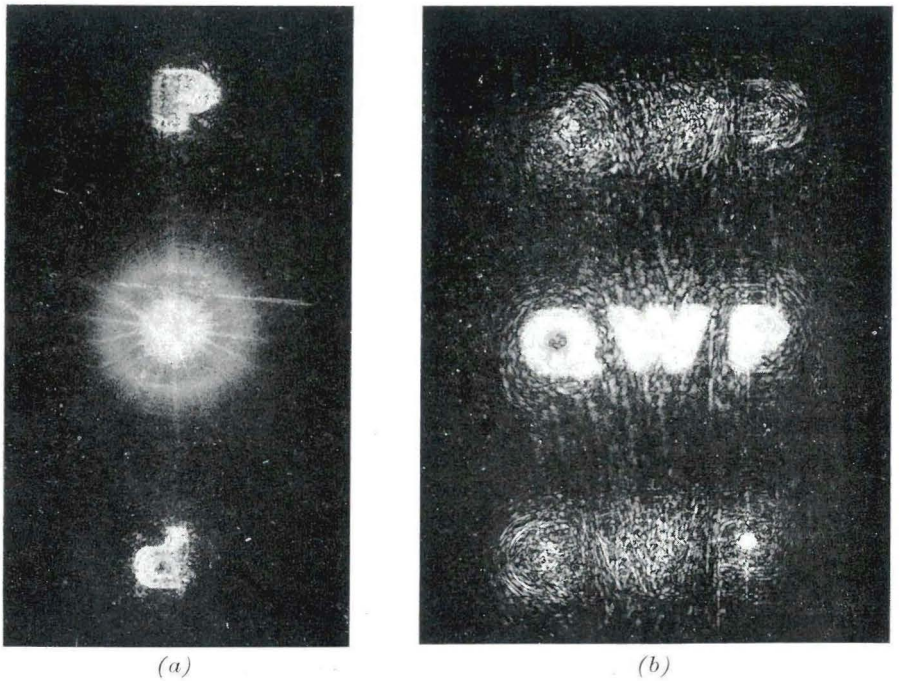
$$|\mathbf{V}_n|^2 \leqslant \int\int_{-\infty}^{\infty} |\mathbf{s}_k|^2 \, d\xi \, d\eta = |\mathbf{V}_k|^2 \tag{7-38}$$

l'égalité étant réalisée si et seulement si:

$$\mathbf{s}_n(x, y) = \varkappa \mathbf{s}_k(x, y)$$

Ce résultat montre donc que le filtre adapté fournit un moyen de reconnaître, parmi un lot de caractères possibles, lequel est réellement présenté au système. On doit souligner que cette propriété n'est pas spécifique du filtre adapté. En fait, dans certains cas, il est possible de modifier (c'est-à-dire de «désadapter») tous les filtres de telle sorte que la discrimination entre les caractères soit améliorée (voir, par exemple, réf. 7-2, p. 130-133).

Réalisation des filtres adaptés destinés à un dispositif de reconnaissance des caractères. — On peut réaliser aisément le filtrage adapté au moyen de la technique de Vander Lugt déjà étudiée. Cette réalisation est particulièrement simple puisque, on s'en souvient, l'un des termes de sortie du filtre de Vander Lugt est lui-même l'intercorrélation du signal d'entrée et du caractère à partir duquel a été réalisé le filtre. En examinant une région convenable du plan de sortie, il est facile d'observer le signal de sortie du filtre adapté.



(*a*) (*b*)

FIG. 7-25. — *a) Photographie de la réponse impulsionnelle d'un filtre de Vander Lugt. b) Photographie de la réponse du système muni de ce filtre lorsque le signal d'entrée est constitué par les lettres Q, W, P.*

La figure 7-25*a* montre une photographie de la réponse impulsionnelle d'un filtre de Vander Lugt réalisé pour la lettre «P». La partie supérieure de la réponse donnera la convolution du signal d'entrée avec le symbole P, tandis que la partie inférieure fournira l'intercorrélation du signal d'entrée avec la lettre P. La partie centrale de la réponse ne présente pas d'intérêt.

La figure 7-25*b* montre la réponse de ce filtre adapté aux lettres Q, W et P. Remarquons la présence du spot intense de lumière dans la réponse à P, présence qui indique une corrélation élevée entre le signal d'entrée et la lettre à laquelle le filtre est adapté.

Pour constituer l'*ensemble* des N filtres adaptés représentés sur la figure 7-24, on pourrait réaliser N filtres de Vander Lugt distincts, et appliquer le signal d'entrée successivement à chacun de ces filtres. Mais, on peut aussi, lorsque N n'est pas trop élevé, enregistrer l'ensemble des filtres sur un seul masque fréquentiel. Ceci peut être

réalisé en utilisant une méthode de multiplex, c'est-à-dire en enregistrant les divers masques fréquentiels sur un même cliché avec différentes fréquences porteuses. La figure 7-26*a* montre comment on peut enregistrer ce filtre multiplex. Les lettres Q, W et P sont situées dans des directions différentes par rapport à la référence, et par suite, les intercorrélations de Q, W et P avec le caractère constituant le signal d'entrée, apparaissent à des distances différentes de l'origine, comme l'indique la figure 7-26*b*.

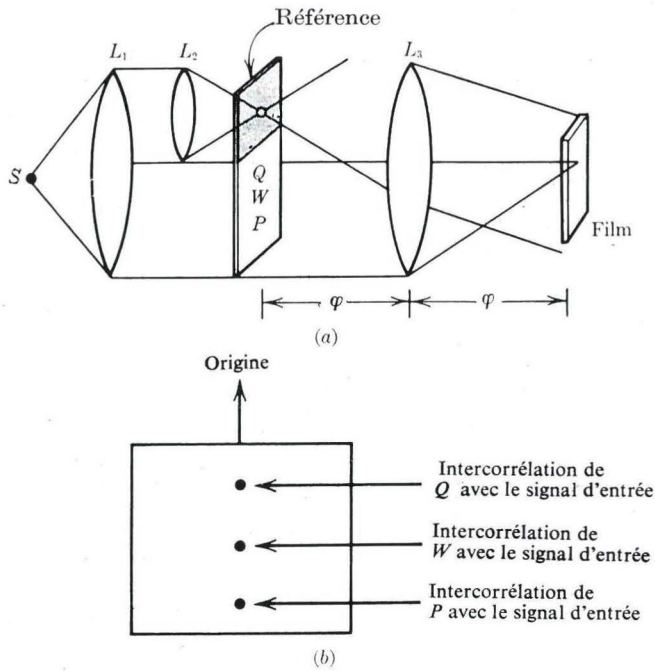


FIG. 7-26. — *Réalisation d'un ensemble de filtres adaptés avec un seul masque fréquentiel. a) Réalisation du masque fréquentiel; b) allure de la réponse du filtre adapté.*

Le nombre de filtres différents que l'on peut enregistrer par cette technique est limité par la gamme de fréquences que l'on peut réaliser dans le masque fréquentiel. Vander Lugt a réalisé l'enregistrement de neuf réponses impulsionnelles séparées sur un seul masque (réf. 7-2, p. 133-139).

Sensibilité à la taille et à l'orientation des caractères. — La technique de reconnaissance des caractères par l'optique cohérente souffre des insuffisances que présentent tous les systèmes de reconnaissance des caractères basés sur l'utilisation de filtres adaptés. De façon plus précise, les filtres sont en général assez sensibles aux changements de taille et aux rotations des caractères formant le signal d'entrée. Lorsqu'un caractère d'entrée se présente avec une orientation ou un grandissement qui ne convient pas, la réponse du filtre adapté à ce caractère est plus faible et des erreurs peuvent s'introduire dans le processus d'identification des caractères. Le degré de sensibilité à l'orientation et à la taille dépend dans une large mesure de la structure de chaque caractère (par exemple la lettre «L» est plus sensible à l'orientation que la lettre «O»);

mais on peut, dans une certaine mesure, le contrôler par une modification du filtrage qui réduit cette sensibilité. Une solution raisonnable consiste souvent à réaliser une recherche mécanique parmi diverses tailles et orientations. Cependant une telle opération est laborieuse. Pour une étude plus détaillée de ces problèmes, on peut se reporter à la référence 7-2, chapitre 7.

7-7. — APPLICATION AU TRAITEMENT DES DONNÉES FOURNIES PAR LES ANTENNES A OUVERTURE SYNTHÉTIQUE

L'une des applications les plus intéressantes de la technique de traitement optique de l'information concerne le tracé de cartes à haute résolution à partir des données recueillies par ce que l'on appelle un *radar à ouverture synthétique*. Toute l'étude qui va suivre s'inspire d'un article de Cutrona et de ses collaborateurs (réf. 7-11) auquel le lecteur peut se reporter pour plus de détails.

Formation de l'ouverture synthétique. — Considérons un système radar transporté par un avion qui vole avec une vitesse uniforme v_a le long d'une trajectoire rectiligne confondue avec l'axe des x sur la figure 7-27. Supposons que la mission du radar soit d'obtenir une carte à haute résolution du pouvoir réflecteur d'une bande de terrain

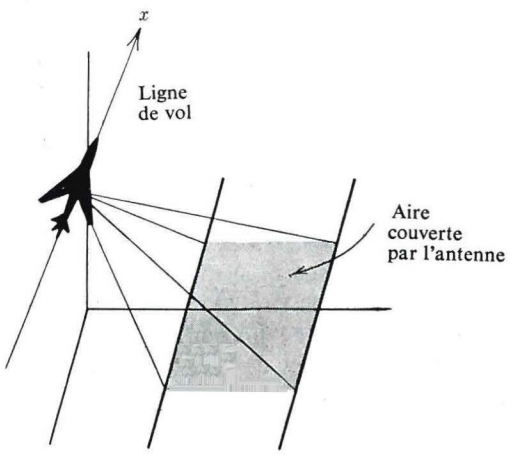


FIG. 7-27. — *Radar à vision latérale.*

située latéralement par rapport à la trajectoire. On détermine la distance d'un point réflecteur à la trajectoire en émettant des impulsions radar et en enregistrant les signaux reçus au cours du temps. Quant à l'azimut, on pourrait en principe l'obtenir en utilisant un faisceau radar ayant une ouverture azimutale extrêmement étroite. Cependant, la résolution azimutale que l'on peut obtenir à la distance R grâce à une antenne de longueur D est sensiblement: $\lambda_r R/D$. Comme l'ordre de grandeur de la longueur d'onde λ_r des ondes radar est bien supérieur à celui des longueurs d'onde optiques,

il faudrait, pour obtenir des résolutions comparables à celles des systèmes de photoreconnaissance, utiliser des antennes beaucoup trop grandes pour être utilisables.

La technique de l'ouverture synthétique permet de résoudre ce problème. Supposons que l'avion porte une petite antenne, *à faisceau large*, dirigée dans une direction latérale fixe par rapport à la trajectoire. Cette antenne émet des impulsions radar en différentes positions de l'avion le long de sa trajectoire. On met en mémoire les enregistrements temporels des amplitudes et des phases des signaux recueillis en ces positions. Chacun de ces enregistrements peut être considéré comme le signal que l'on obtiendrait à partir d'un seul élément d'une antenne; il suffit alors de combiner convenablement les différentes ondes enregistrées pour synthétiser une antenne dont l'ouverture effective pourrait mesurer des centaines ou des milliers de mètres de longueur. Remarquons que pour réaliser l'antenne synthétique la plus longue possible, l'antenne radar doit «éclairer» un point donné du terrain sur un parcours aussi grand que possible de sa trajectoire. Ainsi, plus l'ouverture du faisceau de l'antenne radar est grande, plus la résolution théorique que l'on peut obtenir à partir de l'information recueillie est élevée. L'obtention de la résolution maximale théorique de l'antenne nécessite en outre la présence, à bord de l'avion, d'une référence des phases stable afin de permettre l'enregistrement de l'amplitude et de la phase des signaux reçus le long de la trajectoire.

Les données recueillies et la forme de l'enregistrement. — Pour examiner plus en détail le processus d'enregistrement du signal, considérons tout d'abord la figure 7-28. La position de l'avion le long de la trajectoire est représentée par la coordonnée x. Pour simplifier, supposons qu'il existe un seul point diffusant de coordonnée x_1, situé à la distance r_1 de la trajectoire. Pour simplifier encore, supposons que l'onde émise par le radar soit une sinusoïde entretenue de fréquence f_r. Le signal impulsionnel émis en réalité est un échantillonnage périodique de ce signal sinu-

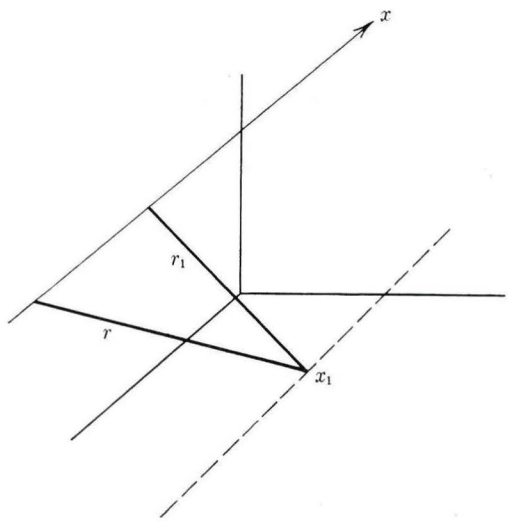


FIG. 7-28. — *Schéma de la trajectoire.*

soïdal. D'après la théorie de l'échantillonnage (voir § 2-3) on peut négliger la nature discrète des signaux en ce qui concerne la détermination de l'azimut, pourvu que la distance parcourue par l'avion entre deux émissions soit inférieure à $(2B_X)^{-1}$, B_X étant la largeur de bande en fréquences spatiales du pouvoir réflecteur du terrain. Par contre, on doit absolument tenir compte de la nature impulsionnelle du signal pour déterminer la résolution du système en ce qui concerne l'autre variable, c'est-à-dire la distance du point diffusant à la trajectoire.

On peut représenter le signal renvoyé vers l'avion par le point diffusant considéré, par la fonction complexe du temps:

$$\mathbf{s}_1(t) = \boldsymbol{\sigma}_1 \exp\left[j2\pi f_r\left(t-\frac{2r}{c}\right)\right] \tag{7-39}$$

où f_r est la fréquence d'émission du radar, r la distance de l'avion à la cible c, la vitesse de la lumière, et $\boldsymbol{\sigma}_1$ un facteur d'amplitude complexe qui dépend de paramètres tels que la puissance transmise, le pouvoir réflecteur de la cible, la variation de phase due à la cible et l'atténuation en $\dfrac{1}{r^4}$ due à la propagation.

La distance r peut s'exprimer en fonction de r_1, x_1 et x (coordonnée de l'avion) par:

$$r = \sqrt{r_1^2+(x-x_1)^2} \cong r_1+\frac{(x-x_1)^2}{2r_1} \tag{7-40}$$

ce qui donne, pour le signal reçu, l'expression:

$$\mathbf{s}_1(t) = \boldsymbol{\sigma}_1(x_1, r_1) \exp\left\{j\left[2\pi f_r t-\frac{4\pi r_1}{\lambda_r}-\frac{2\pi(x-x_1)^2}{\lambda_r r_1}\right]\right\} \tag{7-41}$$

Comme l'avion se déplace à la vitesse uniforme v_a, la variable d'espace x et la variable de temps t sont reliées par:

$$x = v_a t$$

Si on suppose que la bande de terrain située à la distance r_1 est constituée par l'ensemble d'un grand nombre de points diffusants, le signal total reçu peut s'écrire:

$$\begin{aligned}\mathbf{s}(t) &= \sum_n \mathbf{s}_n(t) \\ &= \sum_n \boldsymbol{\sigma}_n(x_n, r_1) \exp\left\{j\left[2\pi f_r t-\frac{4\pi r_1}{\lambda_r}-\frac{2\pi}{\lambda_r r_1}(v_a t-x_n)^2\right]\right\}\end{aligned} \tag{7-42}$$

Ce signal subit une détection synchrone, ce qui revient simplement à remplacer sa fréquence moyenne f_r par une nouvelle valeur f_r' plus faible; en abandonnant la notation complexe, on obtient ainsi:

$$s'(t) = \sum_n |\boldsymbol{\sigma}_n(x_n, r_1)| \cos\left[2\pi f_r' t-\frac{4\pi r_1}{\lambda_r}-\frac{2\pi}{\lambda_r r_1}(v_a t-x_n)^2+\phi_n\right] \tag{7-43}$$

On utilise ce signal détecté pour moduler l'intensité du faisceau électronique d'un oscilloscope, ce faisceau effectuant un balayage vertical pendant un l'intervalle de

temps convenable après l'émission de chaque impulsion. Si on fait défiler le film devant l'oscilloscope avec une vitesse horizontale v_f, on obtient la forme d'enregistrement représentée par la figure 7-29. Les lignes verticales représentent les balayages successifs en distance tandis que la coordonnée horizontale représente les variations de la position azimutale d'un diffuseur donné par rapport au radar.

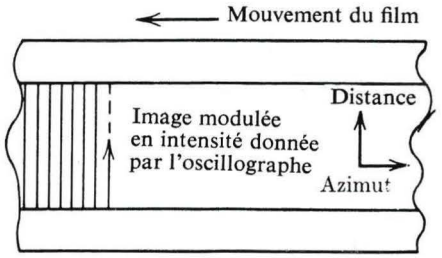


FIG. 7-29. — *Forme de l'enregistrement.*

Propriétés focalisantes du film obtenu. — Considérons de nouveau l'ensemble des points situés à une même distance r_1 ce qui revient à se limiter aux données enregistrées le long de la droite $y = y_1$ du film, et négligeons ici encore la nature impulsionnelle du signal émis. En choisissant convenablement la lumination, on peut faire en sorte que la variation suivant l'azimut du signal de retour se traduise par un enregistrement photographique dont la transmittance en amplitude soit donnée par:

$$t(x, y_1) = t_b + \chi \sum_n |\sigma_n(x_n, r_1)| \cos\left[2\pi f_X x - \frac{4\pi r_1}{\lambda_r} - \frac{2\pi}{\lambda_r r_1}\left(\frac{v_a}{v_f}x - x_n\right)^2 + \phi_n\right] \tag{7-44}$$

où t_b est une transmittance moyenne que l'on introduit pour permettre d'enregistrer les signaux vidéo positifs ou négatifs, et où χ est simplement une constante. Pour écrire (7-44) on a utilisé la relation[1]: $x = v_f \cdot t$ de laquelle on déduit que:

$$f_X = \frac{f_r'}{v_f}$$

En décomposant le cosinus de (7-44) en deux exponentielles complexes, la transmittance s'écrit sous forme de la somme de la transparence moyenne t_b et de deux autres termes:

$$\mathbf{t}_\alpha(x, y_1) = \frac{\chi}{2} \sum_n \boldsymbol{\sigma}_n'(x_n, r_1) \exp\left\{j\left[2\pi f_X x - \frac{2\pi}{\lambda_r r_1}\left(\frac{v_a}{v_f}\right)^2\left(x - \frac{v_f}{v_a}x_n\right)^2\right]\right\} \tag{7-45a}$$

$$\mathbf{t}_\beta(x, y_1) = \frac{\chi}{2} \sum_n \boldsymbol{\sigma}_n'^*(x_n, r_1) \exp\left\{-j\left[2\pi f_X x - \frac{2\pi}{\lambda_r r_1}\left(\frac{v_a}{v_f}\right)^2\left(x - \frac{v_f}{v_a}x_n\right)^2\right]\right\} \tag{7-45b}$$

où la phase constante $4\pi r_1/\lambda_r$ et les phases ϕ_n ont été incluses dans $\boldsymbol{\sigma}_n'$.

[1] Remarquons que la variable x est utilisée maintenant comme coordonnée dans le plan du film, tandis que précédemment elle représentait la coordonnée du radar.

En se limitant à un seul point diffusant, par exemple celui pour lequel $n = N$, la composante correspondante de $\mathbf{t}_\alpha$ est:

$$\mathbf{t}_\alpha^{(N)}(x, y_1) = \frac{\chi}{2} \boldsymbol{\sigma}'_N(x_N, r_1) \exp(j2\pi f_X x) \exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda_r r_1}\left(\frac{v_a}{v_f}\right)^2 \left(x - \frac{v_f}{v_a} x_N\right)^2\right] \quad (7\text{-}46)$$

Le premier terme exponentiel, qui représente une variation de phase linéaire traduit simplement une inclinaison de l'onde transmise correspondante. L'angle θ d'inclinaison par rapport au plan du film peut être déterminé par la relation:

$$\sin\theta = \lambda_0 f_X \quad (7\text{-}47)$$

dans laquelle λ_0 est la longueur d'onde de la lumière utilisée.

Quant au second facteur exponentiel, nous remarquons qu'il présente une ressemblance étroite avec la transmittance d'une lentille cylindrique convergente, centrée au point de coordonnée $x = x_0$, qui s'écrit:

$$\mathbf{t}_l(x) = \exp\left[-j\frac{\pi}{\lambda_0 \varphi_1}(x - x_0)^2\right] \quad (7\text{-}48)$$

où φ_1 est la distance focale. En égalant (7-47) à (7-48) nous trouvons que ce facteur de $\mathbf{t}_\alpha$ se comporte comme une lentille cylindrique convergente de distance focale:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\frac{\lambda_r}{\lambda_0}\left(\frac{v_f}{v_a}\right)^2 r_1 \quad (7\text{-}49)$$

l'axe de la lentille étant situé au point de coordonnée:

$$x = \frac{v_f}{v_a} x_N \quad (7\text{-}50)$$

De la même façon, la Nième composante de $\mathbf{t}_\beta$, soit:

$$\mathbf{t}_\beta^{(N)}(x, y_1) = \frac{\chi}{2} \boldsymbol{\sigma}^*_N(x_N, y) \exp(-j2\pi f_X x) \exp\left[j\frac{2\pi}{\lambda_r r_1}\left(\frac{v_a}{v_f}\right)^2 \left(x - \frac{v_f}{v_a} x_N\right)^2\right] \quad (7\text{-}51)$$

possède un premier facteur exponentiel qui traduit une inclinaison de l'onde transmise dans la direction symétrique, c'est-à-dire dans la direction $-\theta$; le second facteur exponentiel est identique à la transmittance d'une lentille cylindrique *divergente*, centrée aussi au point de coordonnée $x = \dfrac{v_f}{v_a} x_N$, dont la distance focale φ_1 est encore donnée par (7-49).

La figure 7-30 montre les trois composantes de la lumière transmise, dans le cas d'un point diffusant unique. A la transmittance moyenne t_b correspond la partie de l'onde optique incidente qui traverse le film en subissant seulement une atténuation uniforme. On peut considérer que les composantes $\mathbf{t}_\alpha^{(N)}$ et $\mathbf{t}_\beta^{(N)}$ de l'onde transmise produisent un couple d'«images» associée à la coordonnée azimutale du point diffusant de la manière suivante: la composante $\mathbf{t}_\alpha^{(N)}$ concentre la lumière suivant une ligne

focale intense située après le film, tandis que la composante $\mathbf{t}_\beta^{(N)}$ produit une onde qui semble provenir d'une source linéaire située avant le film (voir fig. 7-30).

Dans le cas où il y a un grand nombre de points diffusants à la distance r_1, chacun d'eux produit son propre couple de lignes focales réelles et virtuelles lorsqu'on éclaire le film. Les azimuts des différents points diffusants déterminent les positions relatives des centres des lentilles équivalentes; par conséquent les lignes focales correspondantes

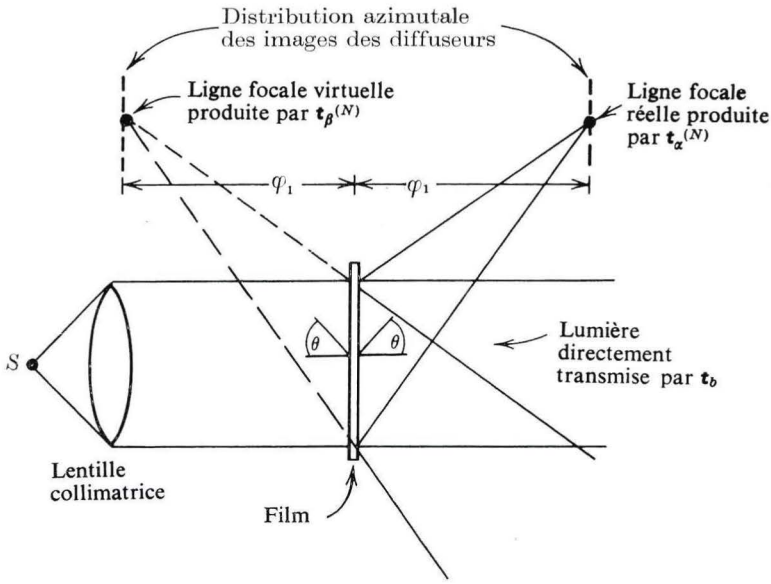


FIG. 7-30. — *Lumière transmise par la ligne $y = y_1$ du film.*

conservent ces positions relatives. Une image complète de la distribution azimutale des diffuseurs situés à la distance r_1 de la trajectoire apparaît donc dans des plans convenables situés en avant et en arrière du film. Soulignons encore le fait que cette image est étalée dans la direction des y puisque le film n'exerce, dans cette direction, aucune action.

Construction de l'image finale. — En définitive ce que nous voulons obtenir c'est non seulement l'image de la distribution des diffuseurs suivant l'azimut, mais aussi celle de leur distribution suivant la distance. La coordonnée «distance» d'un diffuseur a été transformée sur le film en coordonnée y lors de l'enregistrement de la fonction azimutale. Il est donc nécessaire de former l'image des variations de la transmittance du film directement dans le plan où se forment les lignes focales. Ceci est compliqué à réaliser car la distance focale des lentilles équivalentes est fonction de la distance r_1 (cf. (7-49)) et dépend par suite de la valeur particulière considérée de y. Pour construire la carte radar définitive, il est évidemment nécessaire de former l'image des variations de la transmittance selon y sur un plan *incliné* dans lequel se forment les lignes focales azimutales.

Ce problème peut être résolu à l'aide du système optique de la figure 7-31. Une *lentille conique convergente* (cf. Pb. 5-3) est placée immédiatement derrière le film.

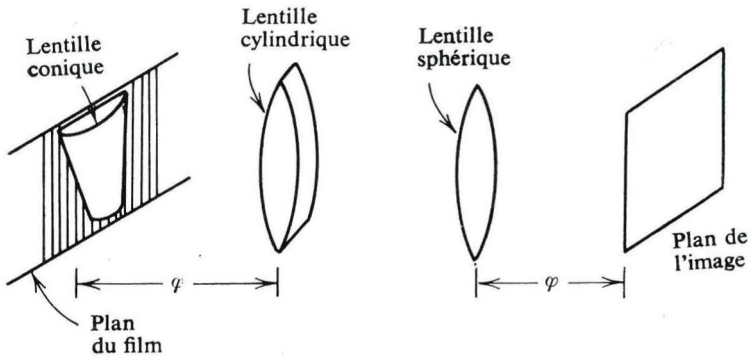


FIG. 7-31. — *Système optique destiné à former l'image.*

La transmittance de cette lentille est:

$$t_l(x, y_1) = \exp\left(-j\frac{\pi}{\lambda_0 \varphi_1} x^2\right) \tag{7-52}$$

et sa distance focale dépend linéairement de la coordonnée «distance» (ou de la coordonnée y correspondante) suivant l'expression:

$$\varphi_1 = \frac{1}{2}\frac{\lambda_r}{\lambda_0}\left(\frac{v_f}{v_a}\right)^2 r_1 \tag{7-53}$$

La comparaison des expressions (7-51), (7-52) et (7-53) montre que cette lentille renvoie à l'infini le plan incliné contenant toutes les focales linéaires *virtuelles*, tandis que les variations de transmittance selon y ne subissent pas de modification. Ce sont les directions particulières suivant lesquelles se trouvent les lignes focales virtuelles rejetées à l'infini qui traduisent à présent l'information azimutale. Une lentille cylindrique, placée à une distance du film égale à sa distance focale, forme à l'infini une image virtuelle de la structure du film dans la direction y. Dès lors, les images en x et y coïncident et doivent simplement être ramenées à distance finie pour donner une image réelle. Une lentille sphérique placée à la suite de la lentille cylindrique réalise cette dernière opération dans son plan focal image qui sert de plan d'observation; on obtient une image réelle des coordonnées en distance et en azimut du terrain étudié, les deux images étant exactement au point dans le plan focal image de cette dernière lentille.

Conclusions. — L'intérêt des techniques de traitement optique pour le tracé de la carte d'un terrain à partir des données fournies par un radar à ouverture synthétique, réside dans la simplicité extrême avec laquelle le système optique réalise la transformation linéaire, complexe et laborieuse qui est nécessaire pour l'obtention d'une image. D'un point de vue philosophique, cette simplicité doit être attribuée, dans une large mesure, à la nature identique (jusqu'aux facteurs d'échelle) des lois régissant la propagation des ondes radar réfléchies et celle des ondes optiques dans le système de traitement. Tant que l'on ne considère que l'information azimutale, on peut admettre que le système crée un modèle optique exact des ondes radar qui tombent

sur le réseau synthétique. Une fois ce modèle optique réalisé, l'image est obtenue par les méthodes optiques classiques.

On doit souligner que la création d'un modèle optique des ondes radar repose sur l'aptitude du film à mettre en mémoire à la fois l'information en amplitude et en phase. La fréquence temporelle non nulle f_r' qui demeure après la détection synchrone, et la fréquence spatiale f_X du film qui en découle, ont joué un rôle primordial dans cette réalisation. Les variations d'amplitude et de phase suivant l'azimut ont été enregistrées sous forme de modulations d'amplitude et de phase de la porteuse spatiale de fréquence f_X, comme le montre de façon évidente la relation (7-44). Le fait que les lignes focales réelles et virtuelles sur la figure 7-30 aient été déviées d'angles θ et $-\theta$, respectivement, par rapport à l'axe du film, découle directement de la présence de cette onde porteuse. En l'absence de telles déviations, les lignes focales virtuelles, par exemple, ne pourraient pas être observées sans qu'il apparaisse des interférences avec la lumière directement transmise et avec la lumière contribuant à former les lignes focales réelles.

L'importance de l'utilisation d'ondes porteuses en optique a déjà été soulignée lors de la discussion relative au filtre de Vander Lugt et, ici encore, elle apparaît de façon évidente. Comme nous le verrons dans le dernier chapitre, c'est aussi principalement grâce à l'emploi de telles techniques que la formation des images par reconstruction d'ondes ou holographie, a repris une telle importance aujourd'hui.

PROBLÈMES

7-1. Un objet a une transmittance en amplitude périodique de la forme:

$$t(x, y) = t(x) \cdot 1$$

où $t(x)$ est représentée sur la figure P 7-1.

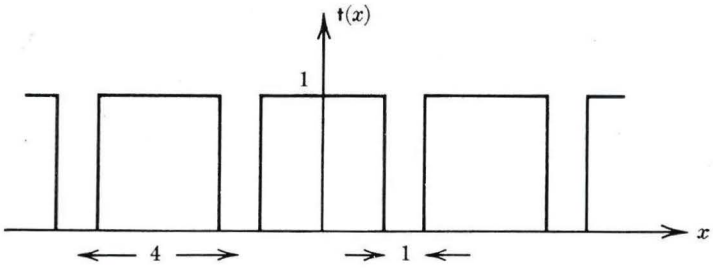


FIG. P 7-1. –

Cet objet est situé dans le plan objet de la figure 7-1. On place un petit écran opaque sur l'axe optique, dans le plan focal de la lentille. Déterminer la distribution *d'intensité* correspondante dans le plan image.

7-2. La méthode d'observation des objets de phase dite du «champ sombre» consiste à placer un petit écran opaque dans le plan focal image de la lentille formant l'image de l'objet, pour arrêter la lumière non diffractée. En supposant que les variations de phase de l'objet sont toujours très inférieures à 1 radian, déterminer l'intensité de l'image observée en fonction des variations de phase de l'objet.

7-3. La méthode dite de «Schlieren» (ou «méthode de Foucault») d'observation des objets de phase consiste à placer dans le plan focal de la lentille formant l'image une lame de couteau pour arrêter la moitié de la lumière diffractée. La transmittance du plan focal peut alors s'écrire:

$$t_f(x, y) = \frac{1}{2}\,[1 + \operatorname{sgn}(x)]$$

a) En supposant que le grandissement est égal à l'unité et en ne tenant pas compte du renversement de l'image, montrer que l'amplitude U_i de l'image est reliée à l'amplitude U_0 de l'objet par:

$$\mathbf{U}_i(x_i, y_i) = \frac{1}{2}\left[\mathbf{U}_0(x_i, y_i) + \frac{j}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mathbf{U}_0(x', y_i)}{x_i - x'}\,\mathrm{d}x'\right]$$

b) on considère un objet dont l'amplitude est:

$$\mathbf{U}_0(x_0, y_0) = \exp\,[j\phi(x_0, y_0)]$$

où $\phi_0 \ll 1$. Montrer que l'intensité de l'image peut s'écrire:

$$I_i(x_i y_i) \cong \frac{1}{4}\left[1 - \frac{2}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\phi(x', y_i)}{x_i - x'}\,\mathrm{d}x'\right]$$

c) Calculer et représenter la distribution d'intensité pour:

$$\phi(x_0, y_0) = \phi_0\,\operatorname{rect}\left(\frac{x_0}{X}\right)$$

avec $\phi_0 \ll 1$.

7-4. Donner une expression de l'intensité de l'image observée lorsque la lame de phase du microscope à constraste de phase de Zernike est en outre partiellement absorbante; on note α la transmittance en intensité qui est comprise entre 0 et 1.

7-5. Une plaque photographique reçoit à l'exposition la distribution d'intensité suivante:

$$\mathcal{I}(x, y) = \mathcal{I}_0 + \Delta\mathcal{I}(x, y) \qquad |\Delta\mathcal{I}| \ll \mathcal{I}_0$$

On réalise ainsi un cliché négatif. En supposant que $\mathcal{I}_0$ soit tel que l'on opère dans la partie rectiligne de courbe H-D, montrer que, lorsque le contraste $\Delta\mathcal{I}/\mathcal{I}_0$ est suffisamment faible, le contraste de la lumière transmise par le négatif est fonction linéaire du contraste de la lumière incidente pendant l'exposition.

7-6. Un certain système de traitement cohérent a une pupille d'entrée dont la largeur est égale à 3 cm. La distance focale de la première lentille réalisant la transformation de Fourier est égale à 10 cm et la longueur d'onde vaut 0,6328 micron. Avec quelle précision doit-on positionner un masque fréquentiel dans le plan focal, si on suppose que le masque a une structure dont les dimensions sont comparables à celles du spectre d'entrée?

7-7. Montrer qu'une modification de la position du signal d'entrée dans le cas d'un filtre adapté n'affecte que la position du maximum de lumière correspondant dans le plan de sortie.

7-8. Un objet de transparence complexe en amplitude $\mathbf{t}(x, y)$ est placé juste devant une lentille convergente. L'objet étant éclairé normalement par une onde plane monochromatique, on enregistre la distribution d'intensité dans le plan focal image sur une plaque photographique. On réalise un cliché positif avec un *gamma égal à 2*. Le cliché développé est alors éclairé normalement par une onde plane, et la même lentille convergente est placée juste derrière le cliché. Quelle est relation qui existe entre la transmittance en amplitude de l'objet initial et la distribution d'intensité observée dans le plan focal image dans la deuxième partie de l'expérience?

7-9. Deux clichés de transmittance en amplitude $\mathbf{h}(x, y)$ et $\mathbf{g}(x, y)$ sont placés devant une lentille convergente, leurs centres étant placés respectivement aux points de coordonnées

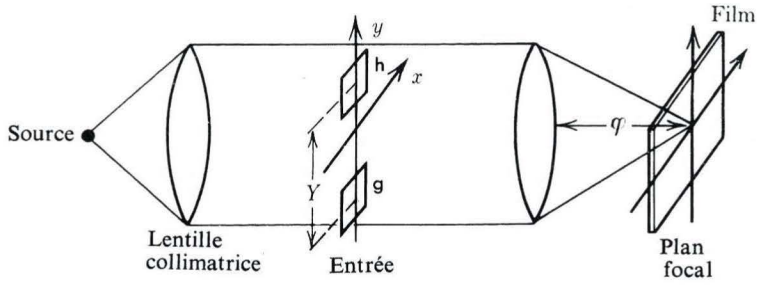


FIG. P 7-9. –

($x = 0$, $y = Y/2$) et ($x=0$, $y = -Y/2$) comme l'indique la figure P 7-9. On enregistre la distribution d'intensité dans le plan focal image de la lentille et on réalise un cliché positif avec un gamma égal à 2.

Le cliché obtenu est placé devant la même lentille et subit à son tour la même transformation. Montrer que l'amplitude lumineuse dans le plan focal image de la lentille contient le produit d'intercorrélation de h et g. A quelle condition ce terme d'intercorrélation peut-il être séparé des autres termes dans le plan focal?

7-10. On forme l'image, en lumière cohérente, d'un objet de phase dont la transmittance en amplitude est $t(x, y) = \exp[j\phi(x, y)]$. Dans le plan focal image du système on place un filtre atténuateur (d'épaisseur constante) dont la transmittance en intensité est:

$$\tau(x, y) = \alpha(x^4 + 2x^2y^2 + y^4)$$

Quelle relation existe-t-il entre l'intensité de l'image et la phase de l'objet?

7-11. Une onde dont la distribution en amplitude s'écrit

$$\mathbf{U}(x, y) = \exp(j\,2\pi f_1 x) + \exp(j\,2\pi f_2 x)$$

tombe sur une plaque photographique. La fonction de transfert de modulation de cette plaque est $M(f)$. On réalise un cliché positif avec un gamma égal à quatre. En supposant que l'on opère dans la partie rectiligne de la courbe H-D, tracer le spectre de fréquences de la distribution d'amplitude complexe transmise par ce cliché. Exprimer les fréquences des composantes transmises en fonction de f_1 et f_2 et leurs amplitudes en fonction de $M(f)$.

7-12. Dans la figure P 7-12, le système de filtrage spatial en éclairage incohérent «défocalisé» (cf. § 7-3) est tel que le premier zéro de sa fonction de transfert de modulation est obtenu pour la fréquence f_0 périodes/cm. En supposant que le document à filtrer soit placé à la distance 2φ d'une lentille circulaire de diamètre L, calculer la «distance de défocalisation» Δ correspondante en fonction de φ, L et f_0. Déterminer numériquement Δ pour $f_0 = 10$ périodes/cm, $\varphi = 10$ cm et L = 2 cm.

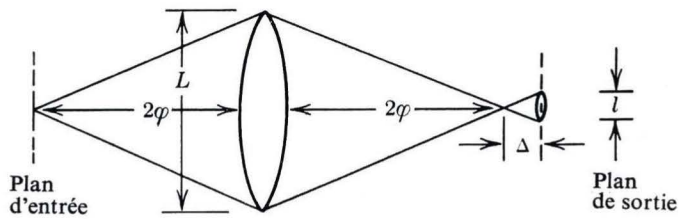


FIG. P 7-12. –

13. On utilise la méthode de Vander Lugt pour réaliser un filtre fréquentiel. Comme l'indique la figure P 7-13*a*, on place le cliché «signal» de transmittance en amplitude $\mathbf{s}(x, y)$ contre une lentille convergente (au lieu de le placer dans son plan focal objet) et la plaque photographique enregistre l'intensité lumineuse dans le plan focal image.

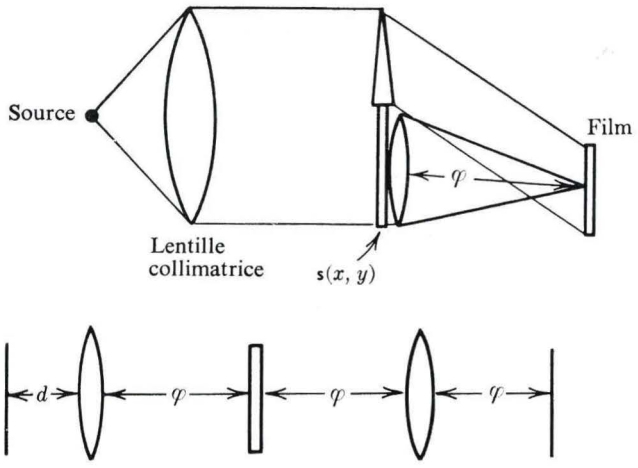


FIG. P 7-13. –

On fait en sorte que la transmittance en amplitude du cliché développé soit proportionnelle à la lumination et on place ce cliché dans le système de la figure P 7-13*b*. En examinant dans chaque cas la partie du plan de sortie qui convient, quelle doit être la distance d entre le plan d'entrée et la première lentille pour réaliser:

a) un filtre de réponse impulsionnelle $\mathbf{s}(x, y)$?

b) un filtre «adapté» de réponse impulsionnelle $\mathbf{s}^*(-x, -y)$?

7-14. Un certain type de radar émet une onde dite «chirp» que l'on peut écrire sous la forme:

$$s(t) = \text{rect}\left(\frac{t}{\tau}\right)\cos\left(2\pi f_r t + \frac{\triangle}{2\pi}t^2\right)$$

Cette onde est réfléchie par une cible immobile située à une distance d inconnue du radar.

a) Comment pourrait-on utiliser les techniques optiques du filtrage adapté pour traiter l'onde reçue pendant l'intervalle de temps T qui suit l'émission de l'impulsion?

b) Comment peut-on déduire la distance d de la grandeur de sortie de ce système optique?

c) Comment pourrait-on filtrer simultanément, dans un même appareil, les signaux reçus pendant un grand nombre de balayages de durée T?

RÉFÉRENCES

7-1 Pollack, D. K., C. J. Koester, and J. T. Tippett (eds.): *Optical Processing of Information*, Spartan Books, Inc., Baltimore, Md., 1963.

7-2 Tippett, J. T., et al. (eds.): *Optical and Electro-optical Information Processing*, The M.I.T. Press, Cambridge, Mass., 1965.

7-3 Porter, A. B.: On the Diffraction Theory of Microscope Vision, *Phil. Mag.*, (6) **11**:154 (1906).

7-4 Zernike, F.: Das Phasenkontrastverfahren bei der Mikroskopischen Beobachtung, *Z. Tech. Phys.*, **16**:454 (1935).

7-5 Armstrong, E. H.: A Method of Reducing Disturbances in Radio Signalling by a System of Frequency Modulation, *Proc. IRE*, **24**:689 (1936).

7-6 Elias, P., D. S. Grey, and D. Z. Robinson: Fourier Treatment of Optical Processes, *J. Opt. Soc. Am.*, **42**:127 (1952).

7-7 Elias, P.: Optics and Communication Theory, *J. Opt. Soc. Am.*, **43**: 229 (1953).

7-8 O'Neil, E. L.: Spatial Filtering in Optics, *IRE Trans. Inform. Theory*, **IT-2:**56 (1956).
7-9 O'Neil, E. L. (ed.): *Communication and Information Theory Aspects of Modern Optics*, General Electric Co., Electronics Laboratory, Syracuse, N.Y., 1962.
7-10 Cutrona, L. J., et al.: Optical Data Processing and Filtering Systems, *IRE Trans. Inform. Theory*, **IT-6:**386 (1960).
7-11 Cutrona, L. J., et al.: On the Application of Coherent Optical Processing Techniques to Synthetic-aperture Radar, *Proc. IEEE*, **54:**1026 (1966).
7-12 Stroke, G. W., and A. T. Funkhouser: Fourier-transform Spectroscopy Using Holographic Imaging without Computing and with Stationary Interferometers, *Phys. Lett.*, **16:**272 (1965).
7-13 Jackson, P. L.: Diffractive Processing of Geophysical Data, *Appl. Opt.*, **4:**419 (1965).
7-14 Mees, C. E. K.: *The Theory of the Photographic Process* (rev. ed.), The Macmillan Company, New York, 1954.
7-15 *Kodak Plates and Films for Science and Industry*, Kodak Data Book P-9, Eastman Kodak Co Rochester N. Y. 1962.
7-16 Kozma, Adam: Photographic Recording of Spatially Modulated Coherent Light *J. Opt. Soc. Am.*, **56:**428 (1966).
7-17 Leith, E. N.: Photographic Film as an Element of a Coherent Optical System, *Phot. Sci. Eng.*, **6:**75 (1962).
7-18 Ingalls, A. L.: The Effect of Film Thickness Variations on Coherent Light, *Phot. Sci. Eng.*, **4:**135 (1960).
7-19 Goldberg, Emanuel: Statistical Machine, U.S. Patent 1,828,389, Dec. 29, 1931.
7-20 Kovasnay, L. S. G., and A. Arman: Optical Autocorrelation Measurement of Two-dimensional Random Patterns, *Rev. Sci. Instr.*, **28:**793 (1957).
7-21 Trabka, E. A., and P. G. Roetling: Image Transformations for Pattern Recognition Using Incoherent Illumination and Bipolar Aperture Masks, *J. Opt. Soc. Am.*, **54:**1242 (1964).
7-22 Armitage, J. D., and A. W. Lohmann: Character Recognition by Incoherent Spatial Filtering, *Appl. Opt.*, **4:**461 (1965).
7-23 Vander Lugt, A. B.: Signal Detection by Complex Spatial Filtering, *Radar Lab., Rept. No.* 4594-22-T, Institute of Science and Technology, The University of Michigan, Ann Arbor, 1963.
7-24 Vander Lugt, A. B.: Signal Detection by Complex Spatial Filtering, *IEEE Trans. Inform. Theory*, **IT-10:**2 (1964).
7-25 Kozma, A., and D. L. Kelly: Spatial Filtering for Detection of Signals Submerged in Noise, *Appl. Opt.*, **4:**387 (1965).
7-26 Turin, G. L.: An Introduction to Matched Filters, *IRE Trans. Inform. Theory*, **IT-6:**311 (1960).

CHAPITRE 8

FORMATION DES IMAGES PAR RECONSTRUCTION DES SURFACES D'ONDE OU HOLOGRAPHIE

En 1948, Dennis Gabor proposa un nouveau procédé de formation des images en deux étapes, sans lentille, qu'il appela reconstruction des surfaces d'ondes (réf. 8-1) Gabor fit la remarque suivante: si on superpose une onde cohérente de référence convenable à la lumière diffractée par un objet, on peut alors enregistrer l'information concernant à la fois l'amplitude et la phase des ondes diffractées, bien que le film photographique ne soit sensible qu'aux intensités. Il démontra qu'à partir de l'enregistrement d'un tel diagramme d'interférences (qu'il appela *hologramme*, ce qui signifie: «enregistrement intégral») on peut obtenir une image de l'objet original.

Cette technique de formation d'images, que nous appellerons désormais *holographie* n'avait suscité dans les premiers temps que peu d'intêrêt; les progrès récents de la technique ont largement étendu son champ d'application. Il en résulte que l'holographie joue à présent un rôle de première importance dans la théorie moderne de la formation des images.

8-1. — INTRODUCTION HISTORIQUE

Gabor, lors de ses premières études concernant la reconstruction des ondes, fut influencé par les travaux antérieurs de W. L. Bragg en radiocristallographie (voir par exemple la référence 8-2); mais ce sont les possibilités d'application de cette nouvelle technique à la microscopie électronique qui motivèrent ses premières recherches. Après une première publication sur ce sujet, Gabor fit paraître en 1949 et 1951, deux articles plus détaillés (réf. 8-3 et 8-4), où il considérait les applications de la reconstruction des surfaces d'onde à la microscopie. Jusqu'à présent, l'application à la microscopie électronique des méthodes qu'il avait envisagées n'a pas été féconde pour des raisons techniques; la microscopie est néanmoins restée un centre d'intérêt important en holographie.

Au cours des années 50, un certain nombre d'auteurs, parmi lesquels G. L. Rogers (réf. 8-5), H. M. A. El Sum (réf. 8-6) et A. Lohmann (réf. 8-7) ont développé de façon appréciable la théorie de la formation des images par reconstruction des surfaces d'ondes.

Cependant, ce n'est qu'au début des années 60, que commença la révolution moderne de l'holographie. Cette fois, ce furent des chercheurs du Radar Laboratory de

l'Université du Michigan, en particulier E. N. Leith et J. Upatnieks (réf. 8-8) qui mirent l'accent sur la similitude entre le procédé de reconstruction d'ondes de Gabor et le problème des antennes à ouverture synthétique. Ils suggérèrent une modification de la technique originale de Gabor, généralisant et améliorant ainsi largement le procédé. Les chercheurs du Michigan associèrent aussitôt ce nouveau développement à la technologie naissante du laser pour réaliser la photographie tridimensionnelle (réf. 8-9). La qualité et la fidélité des images tridimensionnelles obtenues par holographie ont, dans une large mesure, été responsables du grand intérêt populaire porté à la technique de reconstruction des ondes.

Le développement de ces nouvelles techniques de l'holographie, plus puissantes, fut aussitôt suivi par un grand nombre d'applications de ce procédé. Contrairement à une opinion largement répandue, de nombreuses propriétés des hologrammes, parmi lesquelles les plus intéressantes et les plus prometteuses, se sont révélées tout à fait indépendantes de leur aptitude à former des images tridimensionnelles, comme nous le verrons plus en détail au paragraphe 8-9.

8-2. — LE PROBLÈME DE LA RECONSTRUCTION DES SURFACES D'ONDE

Le problème particulier qui sera abordé ici est celui de l'enregistrement et de la reconstruction ultérieure de l'amplitude et de la phase d'une onde optique provenant d'un objet éclairé en lumière cohérente. Ce problème est, bien sûr, assez général pour concerner à la fois toutes les ondes électromagnétiques et les ondes acoustiques. Cependant, nos considérations se limiteront ici au problème de l'optique. Nous adopterons un exposé général semblable à celui présenté par Collier (réf. 8-10).

L'enregistrement de l'amplitude et de la phase. — Comme nous l'avons indiqué plus haut, le procédé de reconstruction des surfaces d'onde doit comporter deux opérations distinctes: un enregistrement ou mise en mémoire de l'information, et une opération finale de reconstruction. Pour le moment, portons notre attention sur la première de ces deux opérations.

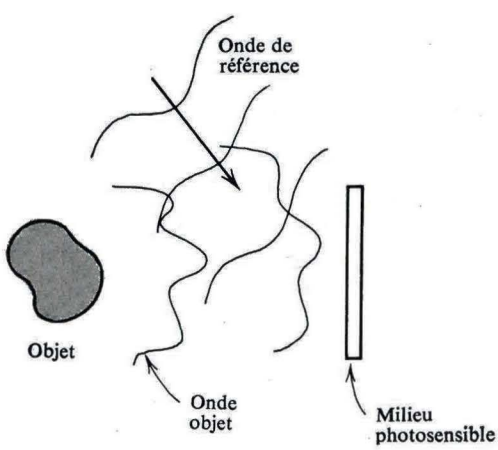


FIG. 8-1. – *Enregistrement interférométrique.*

Puisque les ondes considérées sont cohérentes, il est nécessaire de mettre en mémoire l'information relative à la fois à l'amplitude et à la phase de ces ondes. Cependant, tous les milieux sensibles dont on dispose actuellement enregistrent uniquement l'intensité lumineuse. Il est donc nécessaire de convertir, d'une manière ou d'une autre, l'information concernant la phase en variations d'intensité pour pouvoir

l'enregistrer. *L'interférométrie* constitue une technique classique pour résoudre ce problème; elle consiste à ajouter à l'onde inconnue, une deuxième onde cohérente d'amplitude et de phase connues, comme le montre la figure 8-1. L'intensité de la somme dépend alors à la fois de l'amplitude et de la phase de l'onde à enregistrer. En effet, si:

$$\mathbf{a}(x, y) = a(x, y) \exp [-j\phi(x, y)] \tag{8-1}$$

représente l'onde à enregistrer, et si:

$$\mathbf{A}(x, y) = A(x, y) \exp [-j\psi(x, y)] \tag{8-2}$$

représente l'onde de «référence» avec laquelle **a** interfère, l'intensité de la somme est donnée par:

$$\mathcal{I}(x, y) = |\mathbf{A}(x, y)|^2 + |\mathbf{a}(x, y)|^2 + 2A(x, y)\, a(x, y) \cos [\psi(x, y) - \phi(x, y)] \tag{8-3}$$

Alors que les deux premiers termes de cette expression ne dépendent que des intensités des deux ondes, le troisième dépend de leurs phases relatives. On a ainsi enregistré une information concernant à la fois l'amplitude et la phase de **a**. Un tel enregistrement du diagramme d'interférences de deux ondes peut être considéré comme un hologramme.

Jusqu'à présent nous n'avons supposé aucune propriété particulière relative à l'onde de référence **A**. Les conditions que cette onde devra remplir apparaîtront au cours de notre étude.

Le milieu sensible. — Nous supposons ici que le milieu sensible est une plaque ou un film photographique. Bien qu'on ait enregistré des hologrammes grâce à d'autres dispositifs, parmi lesquels des verres photochromiques et des détecteurs électroniques, le film demeure le moyen d'enregistrement le plus important et le plus largement utilisé.

Comme nous l'avons déjà fait en plusieurs occasions (par exemple, aux paragraphes 7-5 et 7-7) nous supposerons que le récepteur photographique est tel que la transmittance en amplitude du film après développement soit une fonction linéaire de l'intensité reçue pendant l'exposition. Cela revient donc à supposer que les variations de la lumination restent à l'intérieur de la région linéaire de la courbe $(t-E)$ caractéristique de chaque film (les effets des non-linéarités de la courbe $(t-E)$ seront sommairement envisagés au paragraphe 8-6). En outre, nous supposerons que la FTM de l'émulsion s'étend jusqu'à des fréquences suffisamment élevées pour pouvoir enregistrer toutes les fréquences spatiales des ondes incidentes (on examinera les effets entraînés par l'abandon de cette hypothèse au paragraphe 8-5). Nous supposerons enfin que l'intensité $|\mathbf{A}|^2$ de la référence est uniforme sur toute la surface d'enregistrement, de telle sorte que la transmittance en amplitude du film développé puisse s'écrire:

$$\mathbf{t}_f(x, y) = \mathbf{t}_b + \beta'(|\mathbf{a}|^2 + \mathbf{A}^*\mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{a}^*) \tag{8-4}$$

où $\mathbf{t}_b$ est une transmittance «moyenne» uniforme produite par l'onde référence et β' le produit de la pente β de la courbe $(t-E)$ au point de fonctionnement par le temps d'exposition. Remarquons encore que β' est un nombre négatif pour un cliché négatif et un nombre positif pour un cliché positif.

Reconstruction de la surface d'onde enregistrée. — Une fois enregistrée l'information concernant l'amplitude et la phase de l'onde *objet* **a**, il reste à reconstruire cette onde. Supposons que le cliché développé soit éclairé par une onde cohérente de *reconstruction* $\mathbf{B}(x, y)$. La lumière transmise par le cliché est évidemment:

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(x, y)\,\mathbf{t}_f(x, y) &= \mathbf{t}_b\mathbf{B}+\beta'\mathbf{aa}^*\mathbf{B}+\beta'\mathbf{A}^*\mathbf{Ba}+\beta'\mathbf{ABa}^* \\ &= \mathbf{U}_1+\mathbf{U}_2+\mathbf{U}_3+\mathbf{U}_4 \qquad (8\text{-}5)\end{aligned}$$

Remarquons maintenant que si **B** est une réplique exacte de l'onde de référence originale **A**, le troisième terme de cette relation devient:

$$\mathbf{U}_3(x, y) = \beta' |\mathbf{A}|^2 \mathbf{a}(x, y) \qquad (8\text{-}6)$$

L'intensité $|\mathbf{A}|^2$ de la référence étant uniforme, il est clair que $\mathbf{U}_3$ est, à une constante multiplicative près, une réplique exacte de l'onde objet originale **a**, comme l'illustre la figure 8-2*a*.

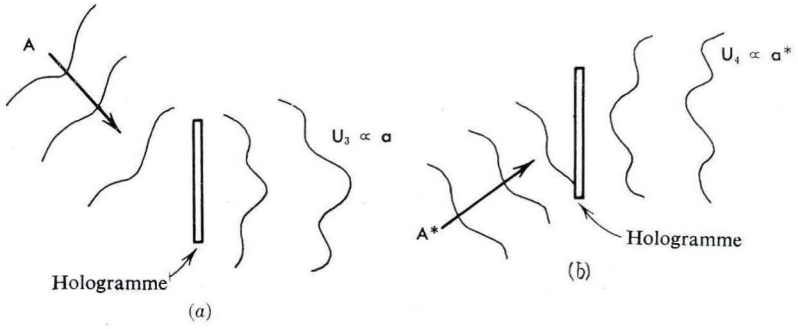


FIG. 8.2. — *Reconstruction d'ondes: a) en éclairant l'hologramme avec l'onde de référence originale* **A**, *b) en éclairant l'hologramme avec l'onde de référence conjuguée* $\mathbf{A}^*$.

De la même manière, si on choisit $\mathbf{B}(x, y)$ de telle sorte qu'elle soit la conjuguée de l'onde de référence, c'est-à-dire $\mathbf{B}(x. y) = \mathbf{A}^*(x, y)$, le quatrième terme de l'onde reconstruite devient:

$$\mathbf{U}_4(x, y) = \beta' |\mathbf{A}|^2 \mathbf{a}^* \qquad (8\text{-}7)$$

qui est proportionnel au conjugué de l'onde objet originale. La figure 8-2*b* illustre ce cas.

Notons que, dans les deux cas, la composante particulière de l'onde à laquelle on s'intéresse (c'est-à-dire $\mathbf{U}_3$ quand $\mathbf{B} = \mathbf{A}$, et $\mathbf{U}_4$ quand $\mathbf{B} = \mathbf{A}^*$) est accompagnée de trois autres composantes, chacune d'elles pouvant être considérée comme un effet d'interférence parasite. Il est évident que si l'on veut obtenir une réplique utilisable de **a** (ou de $\mathbf{a}^*$), il faut trouver une méthode de séparation des diverses composantes de la lumière transmise.

Linéarité du processus de reconstruction des surfaces d'onde. — Le comportement caractéristique du film photographique, tel qu'il est représenté par la relation (8-4), correspond, après développement, à une transformation fortement non-linéaire de

l'amplitude de l'onde reçue pendant l'exposition en l'amplitude de l'onde transmise. Par suite, il pourrait sembler au premier abord que les concepts relatifs aux systèmes linéaires ne puissent jouer aucun rôle dans la théorie de la reconstruction des surfaces d'onde. Heureusement ceci n'est pas le cas. Bien que la transformation d'ensemble introduite par le film ne soit pas linéaire, la transformation de l'amplitude objet **a** en la seule composante $\mathbf{U}_3$ de l'onde transmise est néanmoins parfaitement linéaire: ceci apparaît clairement dans la relation de proportionnalité (8-6). De même, la transformation de **a** en la composante $\mathbf{U}_4$ de l'onde transmise, telle qu'elle est représentée par (8-7) est une relation linéaire. Par suite, le systéme dont la grandeur d'entrée est l'amplitude objet **a** et dont la grandeur de sortie est la compoante $\mathbf{U}_3$ (on $\mathbf{U}_4$) de l'onde transmise, est linéaire. La non-linéarité du film ne se manifeste que par l'apparition de plusieurs termes de sortie, mais le seul terme qui nous intéresse ne présente aucune distorsion, si on suppose que les variations de lumination restent dans la région linéaire de la courbe caractéristique $(t-E)$.

Formation d'une image par reconstruction d'onde. — Jusqu'à présent, nous n'avons étudié que le problème de la reconstruction d'une onde qui provient d'un objet éclairé en lumière cohérente et qui tombe sur une surface sensible. Il suffit cependant de changer légèrement de point de vue pour considérer le processus de reconstruction d'ondes comme un moyen de *formation d'images*.

Remarquons pour cela que la composante $\mathbf{U}_3$ de l'onde dans la relation (8-6) étant simplement une réplique de l'onde objet originale **a**, elle doit apparaître à un observateur comme étant issue de l'objet original, bien que cet objet ait été supprimé. Ainsi quand on utilise comme onde de reconstruction l'onde de référence **A**, on peut considérer que la composante $\mathbf{U}_3$ produit une *image virtuelle* de l'objet original. Ce cas est illustré par la figure 8-3, l'objet se réduisant ici à une source ponctuelle.

De la même manière, quand on utilise comme onde de reconstruction la conjuguée $\mathbf{A}^*$ de l'onde de référence, la composante $\mathbf{U}_4$ de la relation (8-7) engendre aussi une image, mais cette fois, c'est une *image réelle* qui correspond à une focalisation effective de la lumière dans l'espace. Pour le montrer, invoquons la propriété de linéarité établie plus haut, en considérant le cas d'un objet réduit à une source ponctuelle. Le résultat relatif à un objet plus compliqué peut être obtenu par superposition linéaire des solutions relatives aux sources ponctuelles.

Le film reçoit la somme de l'onde de référence **A** et d'une onde sphérique unique:

$$\mathbf{a}(x, y) = \mathbf{a}_0 \exp\left[jk\sqrt{z_0^2+(x-x_0')^2+(y-y_0')^2}\right] \tag{8-8}$$

où (x_0', y_0') sont les coordonnées cartésiennes du point objet et z_0 sa distance au plan de la surface sensible. En éclairant par $\mathbf{A}^*$ l'hologramme développé, nous obtenons la composante $\mathbf{U}_4$ de l'onde transmise dont l'expression:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_4(x, y) &= \beta' |\mathbf{A}|^2 \mathbf{a}^*(x, y) \\ &= \beta' |\mathbf{A}|^2 \mathbf{a}_0^* \exp\left[-jk\sqrt{z_0^2+(x-x_0')^2+(y-y_0')^2}\right]\end{aligned} \tag{8-9}$$

est celle d'une onde sphérique qui *converge* vers un foyer réel à la distance z_0 du plan de l'hologramme, comme le montre la figure 8-3*c*. Un objet plus compliqué peut être considéré comme un ensemble de points sources d'amplitude et de phases

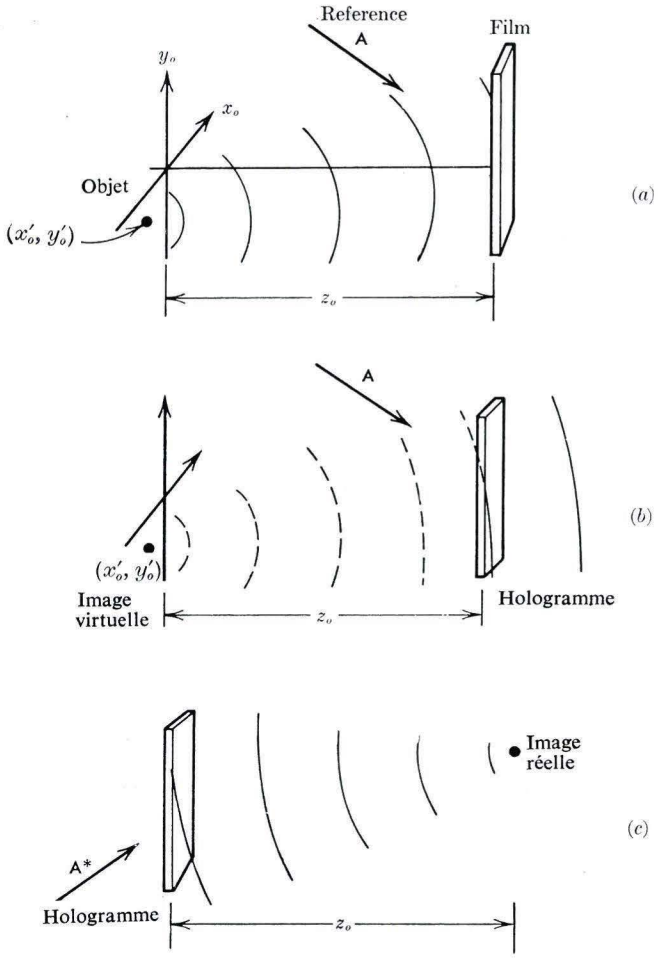


FIG. 8.3. — *Formation d'images par reconstruction d'ondes. a) Enregistrement de l'hologramme d'un point source pris comme objet. b) Formation de l'image virtuelle. c) Formation de l'image réelle.*

variables; chacun de ces points sources engendre d'après la propriété de linéarité sa propre image réelle comme nous venons de le voir. Ainsi se forme une image réelle de l'objet tout entier.

Remarquons que l'amplitude de l'onde décrite par la relation (8-9) est proportionnelle à $\mathbf{a}_0^*$, quantité *conjuguée* de l'amplitude du point source initial. De même, pour un objet plus compliqué, l'image réelle engendrée par l'hologramme est toujours la quantité complexe conjuguée de l'onde objet initiale. Un tel changement de phase n'affecte pas l'intensité de l'image, mais il peut jouer un rôle important dans certaines applications qui utilisent à la fois l'amplitude et la phase de l'image (voir § 8-9).

Insistons encore sur le fait que nous n'avons considéré, dans chaque cas, que l'une des quatre composantes de l'onde transmise par l'hologramme. Ce que nous venons de dire n'a donc de sens que si, par un choix convenable de la référence, les autres

composantes sont supprimées ou séparées de celle à laquelle on s'intéresse. Lorsque ce n'est pas le cas, on doit tenir compte de l'interférence des différentes composantes de la lumière transmise.

8-3. — L'HOLOGRAMME DE GABOR

Tout en gardant à l'esprit la discussion générale précédente, nous allons considérer à présent le procédé de reconstruction des surfaces d'onde dans sa forme originale proposée par Gabor. Nous envisagerons plus loin (§ 8-4) les modifications apportées à ce procédé pour améliorer son aptitude à former des images.

L'origine de l'onde de référence. — La figure 8-4 représente le schéma du montage qui permet d'enregistrer un hologramme de Gabor. On suppose que l'objet est fortement transparent et que sa transmittance en amplitude est de la forme:

$$\mathbf{t}(x_0, y_0) = \mathbf{t}_0 + \mathbf{\Delta t}(x_0, y_0) \tag{8-10}$$

où $\mathbf{t}_0$ est une transmittance moyenne élevée et où $\mathbf{\Delta t}$ représente des variations faibles

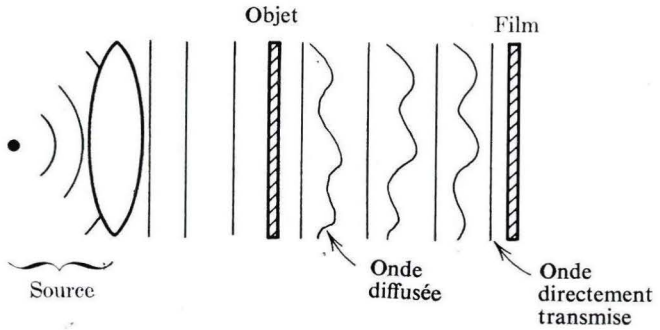


FIG. 8-4. — *Enregistrement d'un hologramme de Gabor.*

autour de cette valeur moyenne, c'est-à-dire:

$$|\mathbf{\Delta t}| \ll |\mathbf{t}_0| \tag{8-11}$$

Lorsqu'un tel objet est éclairé en lumière cohérente par le collimateur représenté sur la figure 8-4, la lumière transmise est formée de deux composantes: (1) une onde plane uniforme, intense, transmise par le terme $\mathbf{t}_0$, et (2) une onde diffusée, faible, produite par les variations de transmittance $\mathbf{\Delta t}(x_0, y_0)$. L'intensité de la lumière tombant sur une plaque photographique située à la distance z_0 de l'objet peut s'écrire:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(x, y) &= |A + \mathbf{a}(x, y)|^2 \\ &= A^2 + |\mathbf{a}(x, y)|^2 + A\mathbf{a}(x, y) + A\mathbf{a}^*(x, y) \end{aligned} \tag{8-12}$$

où A est l'amplitude de l'onde plane, et $\mathbf{a}(x, y)$ est l'amplitude de la lumière diffusée.

Ainsi, en un certain sens, l'objet a fourni lui-même l'onde de référence nécessaire, du fait de la valeur élevée de sa transmittance moyenne $\mathbf{t}_0$. L'interférence de la lumière directement transmise avec la lumière diffusée donne naissance à une répartition d'intensité qui dépend à fois de l'amplitude et de la phase de l'onde diffusée $\mathbf{a}(x, y)$.

Les images jumelles. — Supposons que le cliché photographique développé ait une transmittance en amplitude proportionnelle à sa lumination. Par suite:

$$\mathbf{t}_f(x, y) = \mathbf{t}_b + \beta'(|\mathbf{a}|^2 + A\mathbf{a} + A\mathbf{a}^*) \tag{8-13}$$

Si le cliché est maintenant éclairé par une onde plane d'amplitude uniforme B tombant sous l'incidence normale, l'amplitude de l'onde transmise est la somme de quatre termes:

$$B\mathbf{t}_f = B\mathbf{t}_b + B|\mathbf{a}(x, y)|^2 + \beta' AB\mathbf{a}(x, y) + \beta' AB\mathbf{a}^*(x, y) \tag{8-14}$$

Le premier terme est une onde plane qui traverse directement le cliché, en subissant une atténuation uniforme, mais sans diffusion. On peut négliger le second car notre hypothèse (8-11) implique que:

$$|\mathbf{a}(x, y)| \ll A \tag{8-15}$$

Le troisième terme représente une composante de l'onde proportionnelle à l'onde originale diffusée $\mathbf{a}(x, y)$. Cette onde semble provenir d'une image virtuelle de l'objet initial située à la distance z_0 du cliché, comme on le voit sur la figure 8-5. Le quatrième terme est proportionnel à $\mathbf{a}^*(x, y)$ et, comme nous l'avons déjà montré, il conduit à la formation d'une image réelle située à la distance z_0 du cliché, mais de l'autre côté de celui-ci par rapport à l'image virtuelle (voir figure 8-5).

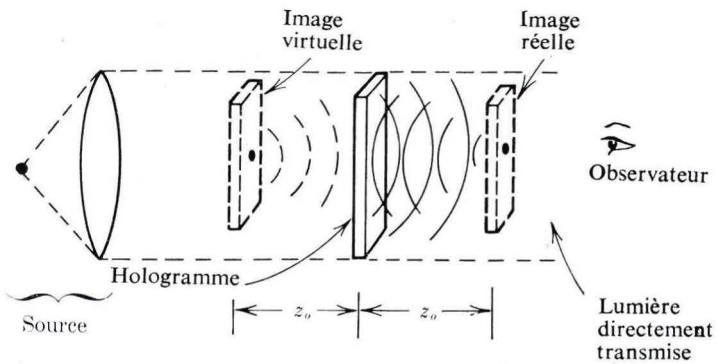


FIG. 8-5. — *Formation des images jumelles.*

L'hologramme de Gabor produit donc simultanément une image réelle et une image virtuelle de l'objet, les deux images étant centrées sur l'axe de l'hologramme. Ces images, dites images *jumelles*, sont séparées par la distance $2z_0$ et coexistent avec le fond cohérent $B\mathbf{t}_b$.

Remarquons que les termes de la relation (8-14) qui contiennent β' changent de signe lorsqu'on passe d'un cliché positif à un cliché négatif (car β' est positif pour un

cliché positif et négatif pour un cliché négatif), alors que le terme représentant le fond cohérent ne change pas. Puisque les ondes images interfèrent avec le fond cohérent au cours du processus final d'observation, un hologramme positif produit une image avec un contraste positif, tandis qu'un hologramme négatif produit une image avec un contraste négatif (c'est-à-dire inversé).

Les limitations de l'hologramme de Gabor. — L'hologramme de Gabor souffre de certaines limitations qui restreignent le champ de ses applications. La limitation la plus importante tient certainement à l'hypothèse (8-11) relative la transparence élevée de l'objet et à la condition (8-15) qui en découle.

Si on ne fait pas cette hypothèse, la composante de l'onde transmise par l'hologramme, d'amplitude:

$$\mathbf{U}(x, y) = \beta' B \, |\mathbf{a}(x, y)|^2 \tag{8-16}$$

ne peut plus être négligée. En fait, si l'objet a une transmittance moyenne faible, cette composante de l'onde peut constituer le terme transmis le plus important, et peut par suite modifier complètement les images de plus faible intensité. Ainsi, avec un hologramme de Gabor il est possible de former par reconstruction des surfaces d'onde des images d'un objet constitué, par exemple, par des lettres opaques sur un fond transparent, mais non par des lettres transparentes sur un fond opaque. Cette restriction gêne sérieusement l'utilisation des hologrammes de Gabor dans de nombreuses applications éventuelles.

Une seconde limitation sérieuse est liée à la formation d'images jumelles au lieu d'une image unique. Le problème ne réside pas dans la présence même de deux images, mais dans le fait qu'elles sont inséparables. Lorsqu'on met au point sur l'image réelle elle est toujours accompagnée de l'image virtuelle défocalisée. De même, un observateur accommodant sur l'image virtuelle voit en même temps une image défocalisée provenant du terme correspondant à l'image réelle. Ainsi, même pour des objets fortement transparents, la qualité des images est réduite par ce problème de l'image jumelle. Un certain nombre de techniques ont été proposées pour éliminer ou atténuer l'image jumelle [par exemple réf. (8-7)]; l'une d'entre elles a été proposée par Gabor lui-même (réf. 8-11). Cependant la plus satisfaisante a été celle de Leith et Upatnieks (réf. 8-8) que nous allons présenter en détail dans le paragraphe suivant.

8-4. — L'HOLOGRAMME DE LEITH-UPATNIEKS

Le type d'hologramme le plus utilisé est l'*hologramme de Leith-Upatnieks*, qualifié aussi d'*hologramme à référence inclinée*. La différence essentielle entre ce type d'hologramme et l'hologramme de Gabor réside dans le fait qu'on introduit pendant l'enregistrement une onde de référence séparée, entièrement distincte de l'onde éclairant l'objet; la référence ne dépend donc plus de la lumière directement transmise par l'objet. En outre, le faisceau de référence fait un certain angle avec l'axe joignant l'objet au film, au lieu de lui être parallèle.

Les premiers résultats obtenus à l'aide de ce type d'hologramme ont été publiés par E. N. Leith et J. Upatnieks en 1962 (réf. 8-8). D'un point de vue historique, il est

assez curieux de noter que la première démonstration de cette technique a été réalisée sans source laser. Cependant, toutes ses possibilités ne sont apparues clairement qu'à partir du moment où on a pu leur associer l'éclairage fortement cohérent du laser (réf. 8-9, 8-12).

L'enregistrement de l'hologramme. — La figure 8-6 représente un montage que l'on peut utiliser pour enregistrer un hologramme de Leith-Upatnieks. La lumière issue d'une source ponctuelle est rendue parallèle par la lentille L. Une partie de l'onde

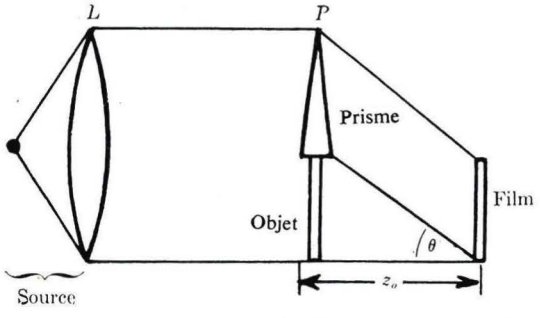


FIG. 8-6. — *Enregistrement d'un hologramme de Leith-Upatnieks.*

plane émergente rencontre l'objet constitué par un cliché photographique dont la transmittance en amplitude au point (x_0, y_0) est $\mathbf{t}_0(x_0, y_0)$. Une seconde partie de l'onde plane rencontre le prisme P situé au-dessus de l'objet: elle est déviée vers le bas d'un angle θ par rapport à l'axe du film. Ainsi, sur la surface sensible, s'ajoutent deux ondes cohérentes, l'une constituée par la lumière que transmet l'objet, la seconde par une onde plane inclinée. La distribution d'amplitude dans le plan du film peut s'écrire:

$$\mathbf{U}(x, y) = A \exp(-j2\pi\alpha y) + \mathbf{a}(x, y) \tag{8-17}$$

où la fréquence spatiale α de l'onde de référence est donnée par:

$$\alpha = \frac{\sin\theta}{\lambda} \tag{8-18}$$

La distribution d'intensité sur le film est donc:

$$\mathcal{J}(x, y) = A^2 + |\mathbf{a}(x, y)|^2 + A\mathbf{a}(x, y) \exp(j2\pi\alpha y) + A\mathbf{a}^*(x, y) \exp(-j2\pi\alpha y) \tag{8-19}$$

On peut obtenir une autre forme, plus explicite, en faisant apparaître l'amplitude et la phase de $\mathbf{a}$, soit:

$$\mathbf{a}(x, y) = a(x, y) \exp[-j\phi(x, y)] \tag{8-20}$$

et en combinant les deux derniers termes de (8-19), il vient:

$$\mathcal{J}(x, y) = A^2 + a^2(x, y) + 2Aa(x, y) \cos[2\pi\alpha y - \phi(x, y)] \tag{8-21}$$

Cette expression montre que l'amplitude et la phase de la lumière transmise par

l'objet ont été enregistrées respectivement sous la forme d'une modulation d'amplitude et d'une modulation de phase d'une onde porteuse de fréquence spatiale α. Si la fréquence de la porteuse est assez élevée (nous verrons bientôt ce qu'il faut entendre par là), on peut retrouver sans ambiguité les distributions de phase et d'amplitude à partir de ce diagramme d'interférences.

La reconstruction des images. — La plaque photographique, développée à la manière habituelle, donne un cliché dont la transmittance en amplitude est proportionnelle à la lumination. La transmittance du cliché peut donc s'écrire:

$$\mathbf{t}_f(x, y) = \mathbf{t}_b + \beta'[|\mathbf{a}|^2 + A\mathbf{a} \exp(j2\pi\alpha y) + A\mathbf{a}^* \exp(-j2\pi\alpha y)] \qquad (8\text{-}22)$$

Pour des raisons de commodité représentons les quatre termes de la transmittance par:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_1 &= \mathbf{t}_b & \mathbf{t}_3 &= \beta' A\mathbf{a}(x, y) \exp(j2\pi\alpha y) \\ \mathbf{t}_2 &= \beta' |\mathbf{a}(x, y)|^2 & \mathbf{t}_4 &= \beta' A\mathbf{a}^*(x, y) \exp(-j2\pi\alpha y) \end{aligned} \qquad (8\text{-}23)$$

Pour l'instant, supposons que l'hologramme soit éclairé par une onde plane d'amplitude uniforme B tombant sous l'incidence normale, comme le montre la figure 8-7. L'onde transmise par l'hologramme possède quatre composantes distinctes:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_1 &= \mathbf{t}_b B & \mathbf{U}_3 &= \beta' BA\mathbf{a}(x, y) \exp(j2\pi\alpha y) \\ \mathbf{U}_2 &= \beta' B |\mathbf{a}(x, y)|^2 & \mathbf{U}_4 &= \beta' BA\mathbf{a}^*(x, y) \exp(-j2\pi\alpha y) \end{aligned} \qquad (8\text{-}24)$$

chacune de ces composantes étant engendrée par l'un des quatre termes de la transmittance définis par les relations (8-23).

La composante $\mathbf{U}_1$ qui n'est autre qu'une forme atténuée de l'onde incidente, représente une onde plane se propageant le long de l'axe du cliché. Le second terme $\mathbf{U}_2$ est fonction de (x, y) et par conséquent se compose d'ondes planes se propageant suivant différentes directions par rapport à l'axe optique. Cependant, comme nous le verrons bientôt plus en détail, si la largeur de bande de $\mathbf{a}(x, y)$ est faible devant la fréquence α de l'onde porteuse, l'énergie transportée par cette onde reste localisée très près de l'axe du cliché; cette onde est alors spatialement séparée des ondes qui forment les images qui nous intéressent.

L'onde $\mathbf{U}_3$ est proportionnelle à l'onde objet originale $\mathbf{a}$ multipliée par un facteur exponentiel dont l'exposant est une fonction linéaire de y. Le fait que $\mathbf{U}_3$ soit proportionnel à $\mathbf{a}$ signifie que ce terme produit une image virtuelle de l'objet à la distance z_0 du cliché, tandis que le facteur exponentiel linéaire $\exp(j2\pi\alpha y)$ exprime que cette image est déviée d'un angle θ par rapport à l'axe du cliché, comme le montre la figure 8-7[1]. De même, l'onde $\mathbf{U}_4$ est proportionnelle à l'onde conjuguée $\mathbf{a}^*$, ce qui indique qu'il se forme une image réelle à la distance z_0 du cliché, du côté opposé à l'image virtuelle. La présence du facteur exponentiel linéaire $\exp(-j2\pi\alpha y)$ exprime que cette image réelle est déviée d'un angle $-\theta$ par rapport à l'axe du cliché, comme on peut encore le voir sur la figure 8-7.

---

[1] Pour que les images restituées ne présentent pas d'aberrations importantes, l'angle θ doit être faible (voir les réferences 8-13 et 8-14). Sur la figure 8-7 cet angle est grand pour des raisons de clarté (N.d.T.).

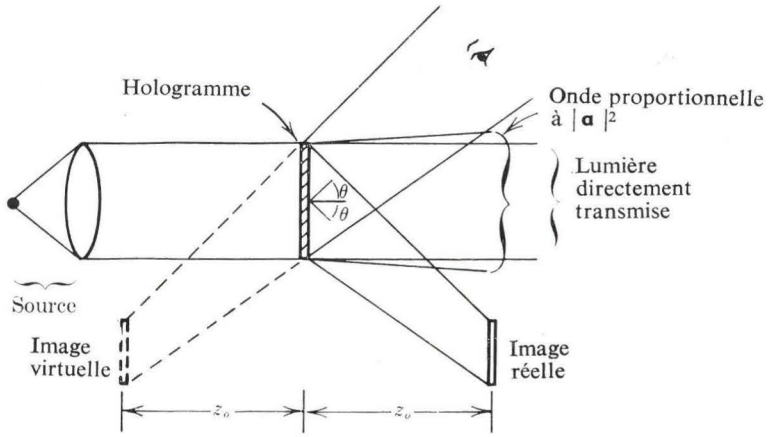


FIG. 8-7. – *Reconstruction des images.*

De ces résultats on peut tirer la conclusion fondamentale suivante: la méthode de Leith-Upatnieks donne encore simultanément une image réelle et une image virtuelle, mais celles-ci sont maintenant séparées l'une de l'autre et séparées aussi des composantes $\mathbf{U}_1$ et $\mathbf{U}_2$ de l'onde transmise. Cette séparation est due à l'utilisation d'une référence inclinée; en réalité la séparation convenable des images réelle et virtuelle exige qu'on utilise un angle de référence θ supérieur à une certaine limite $\theta_{\min}$ (cette valeur minimale $\theta_{\min}$ de l'angle de référence sera précisée un peu plus loin). Lorsque θ est supérieur à $\theta_{\min}$, les images réelle et virtuelle ne sont pas «contaminées» par les autres composantes de l'onde transmise.

Notons en outre que, puisque les images peuvent être observées indépendamment du fond cohérent produit par la transmittance moyenne de l'hologramme, le signe des composantes $\mathbf{U}_3$ et $\mathbf{U}_4$ dans les relations (8-24) n'a pas d'importance. Ainsi, que le cliché soit positif ou négatif, on obtient une image «positive». Pour des raisons pratiques on préfère généralement utiliser directement les clichés négatifs, ce qui évite le processus en deux temps nécessaire pour réaliser des clichés positifs.

Pour terminer, soulignons que nous avons choisi d'éclairer l'hologramme sous l'incidence normale par une onde plane par qui n'est une réplique ni de l'onde de référence originale, ni de sa complexe conjuguée, et que nous avons tout de même obtenu simultanément une image réelle et une image virtuelle. Il est clair que nos hypothèses du paragraphe 8-2 concernant la nature du faisceau de reconstruction étaient trop restrictives. Cependant, lorsque l'épaisseur de l'émulsion photographique est de l'ordre de grandeur des dimensions transversales des détails du diagramme d'interférence enregistré dans l'hologramme, la nature de l'onde de reconstruction devient plus critique. Comme nous le verrons au paragraphe 8-7, il est alors indispensable d'éclairer l'hologramme par une réplique de l'onde de référence pour obtenir une image virtuelle, ou par la complexe conjuguée de l'onde de référence pour obtenir une image réelle. On a laissé au lecteur, à titre d'exercice, (voir Pb. 8-1) le soin de montrer que la disposition relative du faisceau de reconstruction, de l'hologramme et des images est bien celle qu'indiquent les figures 8-8*a* et 8-8*b*.[1]

[1] Voir la note au bas de la page précédente.

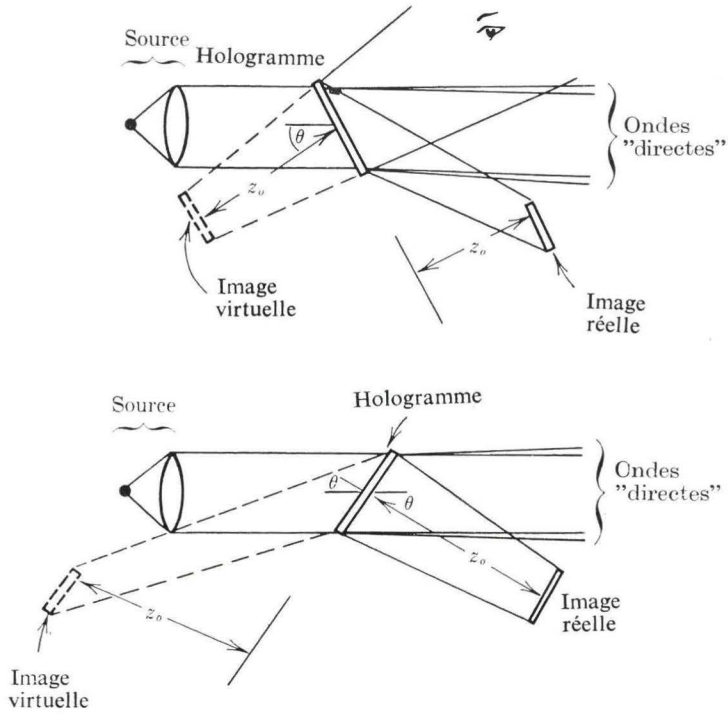


FIG. 8-8. – *Deux montages possibles pour la reconstruction des images: a) l'hologramme est éclairé par une réplique de l'onde de référence; b) l'hologramme est éclairé par l'onde complexe conjuguée de l'onde de référence.*

L'angle de référence minimal. — Revenons au schéma de reconstruction de la figure 8-7: pour que les images jumelles soient séparées l'une de l'autre et séparées aussi de la lumière transmise au voisinage de l'axe du cliché, l'angle θ d'inclinaison de la référence doit être supérieur à une certaine valeur minimale $\theta_{\min}$. Pour évaluer ce minimum, il suffit de déterminer la fréquence minimale α de l'onde porteuse pour laquelle les spectres en fréquences spatiales de $\mathbf{t}_3$ et $\mathbf{t}_4$ (c'est-à-dire, des termes de la transmittance de l'hologramme correspondant aux images virtuelle et réelle) n'empiètent pas l'un sur l'autre, et n'empiètent pas non plus sur les spectres de $\mathbf{t}_1$ et $\mathbf{t}_2$. Si aucun empiètement de ce genre ne se produit, on peut alors en principe, effectuer une transformation de Fourier de l'hologramme à l'aide d'une lentille convergente et éliminer les composantes spectrales indésirables par un diaphragme convenable placé dans le plan focal; on peut ensuite effectuer une deuxième transformation de Fourier pour n'obtenir que la partie de la lumière transmise correspondant à l'une des images jumelles[1]

[1] Dans la pratique les opérations de filtrage spatial sont rarement utilisées pour séparer les images jumelles. Si l'angle de référence satisfait aux conditions que nous allons établir, les images se séparent d'elles-mêmes, étant donné que leurs composantes respectives dans l'onde transmise se propagent dans des directions différentes. (voir figure 8-7). Cependant le filtrage spatial fournit un moyen simple pour obtenir les conditions suffisantes de séparation.

Considérons les spectres en fréquences spatiales des divers termes de la transmittance énumérés en (8-23). En négligeant le fait que l'ouverture du cliché est finie, nous obtenons immédiatement:

$$\mathbf{G}_1(f_X, f_Y) = \mathcal{F}\{\mathbf{t}_1(x, y)\} = \mathbf{t}_b\delta(f_X, f_Y) \tag{8-25}$$

D'après le théorème relatif à l'autocorrélation, nous avons aussi:

$$\mathbf{G}_2(f_X, f_Y) = \mathcal{F}\{\mathbf{t}_2(x, y)\} = \beta'\mathbf{G}_a(f_X, f_Y) \bigstar \mathbf{G}_a(f_x, f_y) \tag{8-26}$$

où: $$\mathbf{G}_a(f_X, f_Y) = \mathcal{F}\{\mathbf{a}(x, y)\} \tag{8-27}$$

et où le symbole $\bigstar$ représente l'autocorrélation. Enfin, nous avons:

$$\mathbf{G}_3(f_X, f_Y) = \mathcal{F}\{\mathbf{t}_3(x, y)\} = \beta' A\mathbf{G}_a(f_X, f_Y - \alpha) \tag{8-28}$$

et $$\mathbf{G}_4(f_X, f_Y) = \mathcal{F}\{\mathbf{t}_4(x, y)\} = \beta' A\mathbf{G}_a^*(-f_X, -f_Y - \alpha) \tag{8-29}$$

Remarquons ici que la largeur de bande de la fonction $\mathbf{G}_a$ est identique à la largeur de bande de l'objet: en effet les deux spectres ne diffèrent que par la fonction de transfert associée à la propagation, qui est une fonction de phase pure, donnée par la relation (3-47). Supposons que l'objet n'ait pas de composante fréquentielle supérieure à B périodes/mm. On peut donc représenter le spectre de $|\mathbf{G}_a|$ par la figure 8-9*a*. Le spectre correspondant de la transmittance de l'hologramme est schématisé

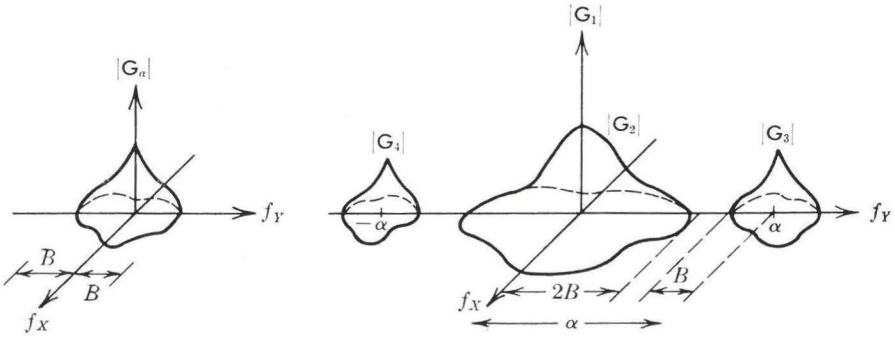


FIG. 8-9. – *a) Spectre de l'objet. b) Spectre de l'hologramme.*

par la figure 8-9*b*. Le terme $|\mathbf{G}_1|$ se réduit à une fonction δ située à l'origine du plan (f_X, f_Y). Le terme $|\mathbf{G}_2|$, étant proportionnel à la fonction d'autocorrélation de $|\mathbf{G}_a|$ s'étend jusqu'à la fréquence $2B$. Enfin, $|\mathbf{G}_3|$ est simplement proportionnel à $|\mathbf{G}_a|$, mais centré au point de coordonnées $f_X = 0$, $f_Y = \alpha$, tandis que $|\mathbf{G}_4|$ est proportionnel au symétrique de $|\mathbf{G}_a|$ centré au point de coordonnées $f_X = 0$, $f_Y = -\alpha$.
L'examen de la figure 8-9*b* montre que $|\mathbf{G}_3|$ et $|\mathbf{G}_4|$ peuvent être isolés de $|\mathbf{G}_2|$ si:

$$\alpha \geqslant 3B \tag{8-30}$$

c'est-à-dire si: $$\sin\theta \geqslant 3B\lambda \tag{8-31}$$

La valeur minimale de l'angle de référence pour laquelle il y a séparation est donc donnée par:

$$\theta_{\min} = \text{Arcsin}\,(3B\lambda) \tag{8-32}$$

Lorsque l'onde de référence est plus intense que l'onde objet, cette condition peut être quelque peu assouplie. Le terme $\mathbf{G}_2$ est dû à l'interférence des ondes issue de chacun des point de l'objet avec les ondes provenant de tous les autres points de l'objet; Au contraire, $\mathbf{G}_3$ et $\mathbf{G}_4$ proviennent de l'interférence de l'onde de référence avec l'onde objet. Lorsque l'onde objet est plus faible que l'onde de référence (c'est-à-dire lorsque $a \ll A$) l'ordre de grandeur de $\mathbf{G}_2$ est inférieur à celui de $\mathbf{G}_1$, $\mathbf{G}_3$, et $\mathbf{G}_4$, et $\mathbf{G}_2$ peut alors être négligé. Dans ce cas l'angle de référence minimal est celui qui sépare seulement $\mathbf{G}_3$ de $\mathbf{G}_4$ soit:

$$\theta_{\min} = \text{Arcsin}\,(B\lambda) \tag{8-33}$$

Extension au cas où les ondes de référence et de reconstruction ne sont pas planes. — Dans la pratique, on est amené à considérer des montages plus généraux pour l'enregistrement des hologrammes et la reconstruction des images. Les systèmes de reconstruction des surfaces d'onde qui utilisent des ondes de référence et de reconstruction sphériques sont particulièrement intéressants[1]. Sur la figure 8-10*a*, nous avons

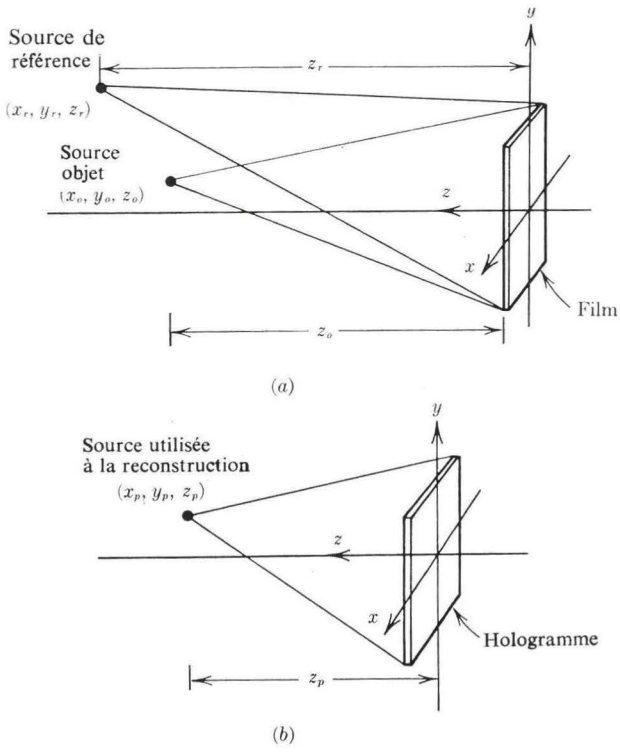


FIG. 8-10. — *Configuration générale des montages: a)* d'enregistrement, *b)* de reconstruction

[1] Pour une discussion plus approfondie, notamment dans le cas où l'on tient compte des aberrations, on se reportera aux références (8-13) et (8-14).

supposé l'onde de référence produite par une source ponctuelle de coordonnées (x_r, y_r, z_r). Puisque la transformation de l'amplitude objet en amplitude de l'onde restituée demeure linéaire quelle que soit la forme de l'onde de référence (voir § 8-2), il suffit[1] de considérer un objet constitué par un point source unique de coordonnées (x_0, y_0, z_0). Comme le montre la figure (8-10*b*), lors de la reconstruction, l'hologramme est éclairé par une onde sphérique provenant du point source de coordonnées (x_p, y_p, z_p). Pour plus de généralité encore, on peut supposer que la longueur d'onde λ_2, utilisée pour la reconstruction est différente de la longueur d'onde λ_1 utilisée pendant l'enregistrement.

En utilisant les approximations quadratiques des ondes sphériques, l'amplitude résultante dans le plan du film photographique peut s'écrire:

$$\mathbf{U}(x, y) = \mathbf{A} \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda_1 z_r}[(x-x_r)^2+(y-y_r)^2]\right\} + \mathbf{a} \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda_1 z_0}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\} \quad (8\text{-}34)$$

où **A** et **a** sont des constantes complexes représentant les amplitudes et les phases relatives des deux ondes sphériques. La distribution correspondante d'intensité dans le diagramme d'interférence est donc:

$$\begin{aligned}\mathcal{I}(x, y) = {} & |\mathbf{A}|^2+|\mathbf{a}|^2 \\ & +\mathbf{A}^*\mathbf{a} \exp\left\{-j \frac{\pi}{\lambda_1 z_r}[(x-x_r)^2+(y-y_r)^2]+j \frac{\pi}{\lambda_1 z_0}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\} \\ & +\mathbf{A}\mathbf{a}^* \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda_1 z_r}[(x-x_r)^2+(y-y_r)^2]-j \frac{\pi}{\lambda_1 z_0}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}\end{aligned} \quad (8\text{-}35)$$

Si la transmittance en amplitude du cliché développé est proportionnelle à la lumination, les termes importants de la transmittance sont alors:

$$\begin{aligned}\mathbf{t}_3 &= \beta' \mathbf{A}^*\mathbf{a} \exp\left\{-j \frac{\pi}{\lambda_1 z_r}[(x-x_r)^2+(y-y_r)^2]+j \frac{\pi}{\lambda_1 z_0}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\} \\ \mathbf{t}_4 &= \beta' \mathbf{A}\mathbf{a}^* \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda_1 z_r}[(x-x_r)^2+(y-y_r)^2]-j \frac{\pi}{\lambda_1 z_0}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}\end{aligned} \quad (8\text{-}36)$$

Eclairons l'hologramme par l'onde sphérique:

$$\mathbf{U}_p(x, y) = \mathbf{B} \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda_2 z_p}[(x-x_p)^2+(y-y_p)^2]\right\} \quad (8\text{-}37)$$

Les deux ondes qui nous intéressent après traversée du cliché s'obtiennent en multipliant

[1] Nous supposons implicitement dans cette étude simplifiée que l'inclinaison de l'onde de référence est suffisante pour permettre la séparation des images réelle et virtuelle.

(8-36) par (8-37), ce qui donne:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_3(x, y) &= t_3\mathbf{B} \exp\left\{j\frac{\pi}{\lambda_2 z_p}[(x-x_p)^2+(y-y_p)^2]\right\}\\ \mathbf{U}_4(x, y) &= t_4\mathbf{B} \exp\left\{j\frac{\pi}{\lambda_2 z_p}[(x-x_p)^2+(y-y_p)^2]\right\}\end{aligned} \tag{8-38}$$

Pour identifier la nature de ces deux ondes transmises, nous devons étudier la façon dont les expressions (8-38) dépendent de x et y. Comme ces deux expressions $\mathbf{U}_3$ et $\mathbf{U}_4$ ne comportent que des termes linéaires et quadratiques en x et y, on peut les considérer comme des approximations quadratiques d'ondes sphériques; la présence de termes linéaires indique simplement que les ondes convergent vers des points situés hors de l'axe des z (ou divergent à partir de ces points). Il reste à déterminer la position exacte de ces points (réels ou virtuels).

Remarquons que ce sont les termes de phase qui dépendent de x^2 et y^2 qui déterminent la coordonnée z des foyers, tandis que les termes linéaires déterminent les coordonnées d'inclinaison x et y. En groupant les termes en (x^2+y^2) nous trouvons des exponentielles de la forme:

$$\exp\left[j\pi\left(\mp\frac{1}{\lambda_1 z_r}\pm\frac{1}{\lambda_1 z_0}+\frac{1}{\lambda_2 z_p}\right)(x^2+y^2)\right] \tag{8-39}$$

où l'ensemble des signes supérieurs est relatif à l'onde ($\mathbf{U}_3$) et l'ensemble des signes inférieurs à l'onde ($\mathbf{U}_4$). En comparant ces expressions à celle d'une onde sphérique divergeant à partir d'un point situé à la distance z_i à gauche de l'hologramme sur la figure 8-10*b*, soit:

$$\exp\left[j\frac{\pi}{\lambda_2 z_i}(x^2+y^2)\right] \tag{8-40}$$

nous trouvons pour expression de la distance z_i du point source apparent à l'hologramme:

$$z_i = \left(\frac{1}{z_p}\mp\frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_r}\pm\frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_0}\right)^{-1} \tag{8-41}$$

où, ici encore, l'ensemble des signes supérieurs est relatif à l'onde ($\mathbf{U}_3$) et l'ensemble des signes inférieurs à l'onde ($\mathbf{U}_4$). Lorsque z_i est positif, l'image est virtuelle et se situe à gauche de l'hologramme sur la figure 8-10*b*; lorsque z_i est négatif, l'image est réelle et se situe à droite de l'hologramme.

Les coordonnées z des images étant déterminées par (8-41), il reste à préciser leurs coordonnées x et y. On peut trouver ces coordonnées en groupant les termes linéaires en x et y des expressions (8-38) et en les comparant à des termes de la forme:

$$\exp\left[-j\frac{2\pi}{\lambda_2 z_i}(x_i x+y_i y)\right] \tag{8-42}$$

Les deux termes qui nous intéressent sont:

$$\exp\left\{j2\pi\left[\left(\mp\frac{x_0}{\lambda_1 z_0}\pm\frac{x_r}{\lambda_1 z_r}-\frac{x_p}{\lambda_2 z_p}\right)x+\left(\mp\frac{y_0}{\lambda_1 z_0}\pm\frac{y_r}{\lambda_1 z_r}-\frac{y_p}{\lambda_2 z_p}\right)y\right]\right\} \tag{8-43}$$

En comparant (8-42) à (8-43) nous obtenons par identification:

$$\begin{aligned} x_i &= \mp\frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_0} x_0 \pm \frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_r} x_r + \frac{z_i}{z_p} x_p \\ y_i &= \mp\frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_0} y_0 \pm \frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_r} y_r + \frac{z_i}{z_p} y_p \end{aligned} \tag{8-44}$$

qui sont les coordonnées x et y des deux points images.

Notons en particulier qu'une variation $(\Delta x_0, \Delta y_0)$ des coordonnées de l'objet se traduit par la variation des coordonnées de l'image:

$$\left(\mp\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{z_i}{z_0} \Delta x_0, \mp\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\frac{z_i}{z_0} \Delta y_0 \right)$$

Au procédé de reconstruction d'ondes correspond donc, dans cette configuration générale, un grandissement:

$$M = \left| \frac{\Delta x_i}{\Delta x_0} \right| = \left| \frac{\Delta y_i}{\Delta y_0} \right| = \left| \frac{\lambda_2 z_i}{\lambda_1 z_0} \right| \tag{8-45}$$

Si on substitue (8-41) dans (8-45) on obtient l'expression équivalente:

$$M = \left| 1 - \frac{z_0}{z_r} \mp \frac{\lambda_1 z_0}{\lambda_2 z_p} \right|^{-1} \tag{8-46}$$

Lorsqu'on utilise une onde de référence plane ($z_r = \infty$) et une onde de reconstruction plane ($z_p = \infty$), on voit que le grandissement est égal à l'unité quel que soit le rapport des longueurs d'ondes $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$ [1]. On obtient aussi un grandissement unitaire pour l'image virtuelle quand $\lambda_2 = \lambda_1$, et $z_p = z_r$ et, pour l'image réelle quand $\lambda_2 = \lambda_1$ et $z_p = -z_r$ (voir Pb. 8-3).

Extension à la photographie tridimensionnelle. — En 1964, Leith et Upatnieks présentèrent pour la première fois des résultats remarquables concernant l'extension de l'holographie à la photographie tridimensionnelle. Le succès de leurs expériences reposa en grande partie sur le fait qu'ils disposaient d'un laser He-Ne dont la cohérence temporelle et la cohérence spatiale étaient excellentes.

La figure (8-11*a*) schématise le montage général utilisé pour enregistrer des hologrammes d'objets tridimensionnels. On éclaire l'objet considéré en lumière cohérente. En outre, une partie du faisceau incident tombe sur un miroir de «référence» placé près de l'objet. La lumière réfléchie par le miroir vers la plaque photographique sert d'onde de référence et interfère avec la lumière réfléchie par l'objet lui-même. La plaque photographique enregistre ainsi un hologramme de l'objet tridimensionnel.

---

[1] La distance z_i relative à l'image dépend cependant de $\frac{\lambda_1}{\lambda_2}$.

Pour reconstruire les images on éclaire la plaque développée par une onde de reconstruction, comme l'indique la figure (8-11*b*). L'image virtuelle tridimensionnelle apparaît derrière la plaque, figée dans l'espace. Puisqu'on obtient, à la reconstruction une réplique des ondes tombant sur la plaque lors de l'enregistrement, l'image conserve toutes les propriétés tridimensionnelles de l'objet original. En particulier on observe aisément des effets de parallaxe: l'observateur est capable de regarder derrière les objets situés au premier plan en changeant simplement de point d'observation.

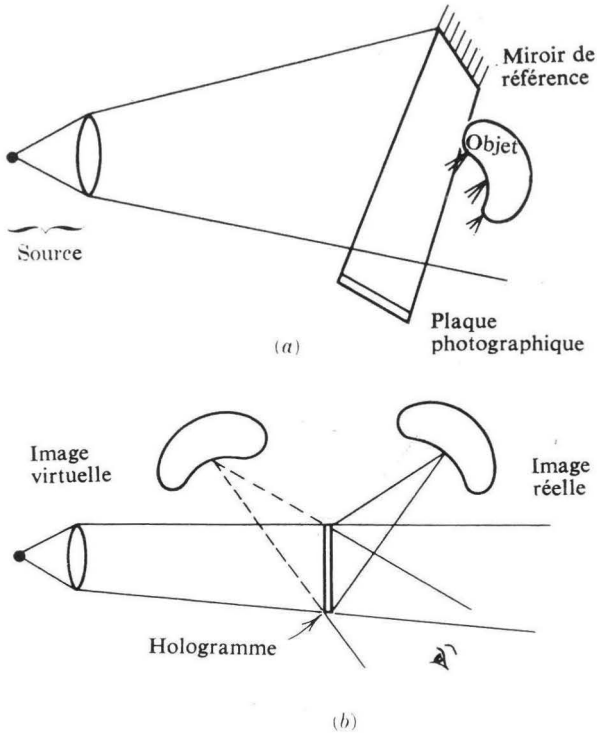


FIG. 8-11. — *Imagerie holographique d'un objet tridimensionnel. a) Enregistrement de l'hologramme. b) Reconstruction des images.*

L'image réelle donnée par ce procédé se forme dans l'espace situé entre la plaque photographique et l'observateur. Dans le cas d'objets tridimensionnels, cette image a certaines propriétés qui la rendent moins intéressante que l'image virtuelle. Tout d'abord, les points de l'objet qui étaient les plus proches de la plaque photographique (et par suite les plus rapprochés d'un observateur dans la scène d'origine) apparaissent encore dans l'image réelle reconstruite les plus rapprochés de la plaque photographique, c'est-à-dire *les plus éloignés de l'observateur* (cf. fig. 8-11*b*). Ainsi, lorsqu'on observe l'image réelle, les effets de parallaxe ne sont pas ceux qui apparaissent dans la scène d'origine; l'image semble «retournée» d'une certaine façon que le lecteur ne pourra bien saisir que s'il observe lui-même cette image réelle. Des images de ce type sont dites *pseudoscopiques*.

Un deuxième inconvénient apparaît lorsqu'on veut enregistrer l'image réelle directement sur une plaque photographique; l'expérimentateur s'aperçoit très vite que, pour des hologrammes de taille raisonnable, la profondeur de champ est généralement si faible qu'on ne peut pas obtenir d'enregistrement reconnaissable. Ce problème peut être partiellement résolu en n'éclairant qu'une petite partie de l'hologramme: dans ce cas cas la profondeur de champ est augmentée et on peut enregistrer une image bidimensionnelle convenable. Lorsqu'on utilise une partie différente de l'hologramme, la perspective apparente de l'image bidimensionnelle se modifie. Ainsi chaque petite région d'un hologramme étendu est capable de produire une image réelle de l'objet original avec une perspective différente!

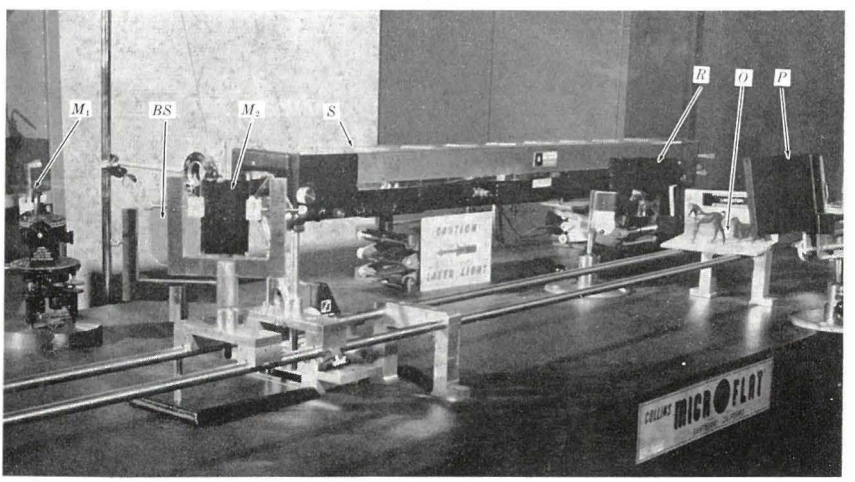


FIG. 8-12. – *Dispositif expérimental permettant d'enregistrer des hologrammes d'objets tridimensionnels: S: source laser; M_1 miroir; BS lame séparatrice; M_2 miroir; O objets; R miroir de référence; P: plaque photographique.*

La figure 8-12 montre un dispositif expérimental utilisé pour l'enregistrement d'hologrammes d'objets tridimensionnels. La lumière provenant du laser *S* est envoyée, grâce au miroir M_1, sur une lame séparatrice *BS*. Une partie de la lumière passe au travers de la séparatrice et est dirigée par le miroir M_2 vers la scène tridimensionnelle, qui dans ce cas est constituée par deux petites figurines placées devant un panonceau. Une deuxième partie de la lumière, réfléchie par la séparatrice *BS*, éclaire le miroir de référence *R*, dans lequel se réflète ici par hasard l'une des figurines. La lumière provenant du miroir de référence et celle qui provient de la scène interfèrent sur la plaque photographique *P*.

La figure 8-13 est une photographie de l'hologramme développé lui-même. On peut remarquer qu'il ne comporte aucune structure que l'on puisse identifier à une partie donnée de l'objet. En fait, on peut même dire que la plus grande partie de la structure visible ne relève pas de la reconstruction, en ce sens qu'elle provient d'imperfections de l'appareillage optique (par exemple de grains de poussière sur les miroirs). La structure qui produit effectivement l'image reconstruite est beaucoup trop fine pour être résolue sur cette photographie.

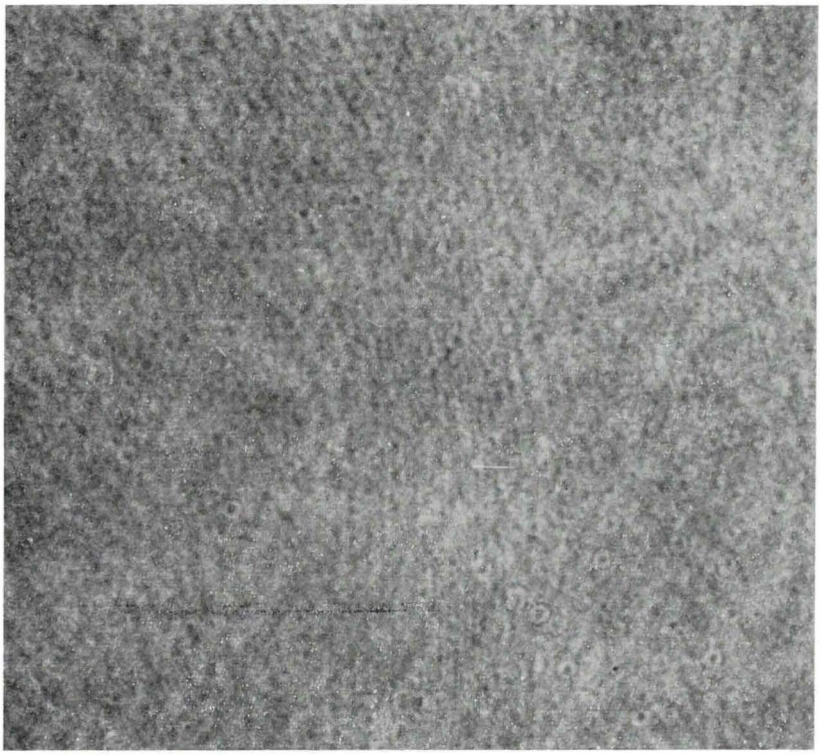


FIG. 8-13 — *Une photographie de l'hologramme lui-même.*

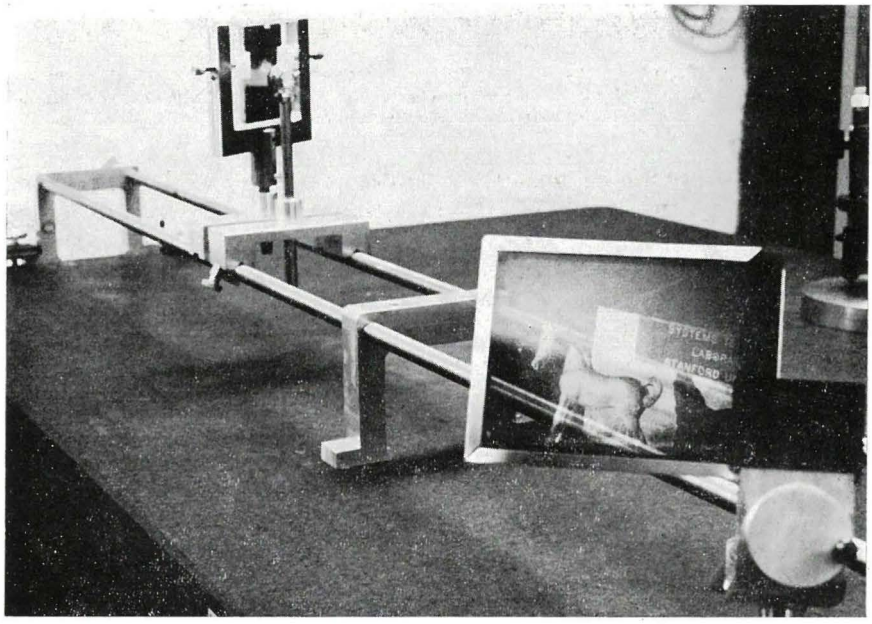


FIG. 8-14. — *Dispositif expérimental permettant l'observation de l'image virtuelle.*

La figure 8-14 montre de quelle façon on peut observer l'image virtuelle. Le laser n'est pas visible sur cette photographie et on voit seulement le miroir M qui dévie le faisceau. On voit à l'arrière de l'hologramme l'image virtuelle d'une figurine représentant un cheval.

Pour illustrer le caractère véritablement tridimensionnel de l'image virtuelle, référons nous à la figure 8-15 qui montre deux photographies de cette image virtuelle. Sur la

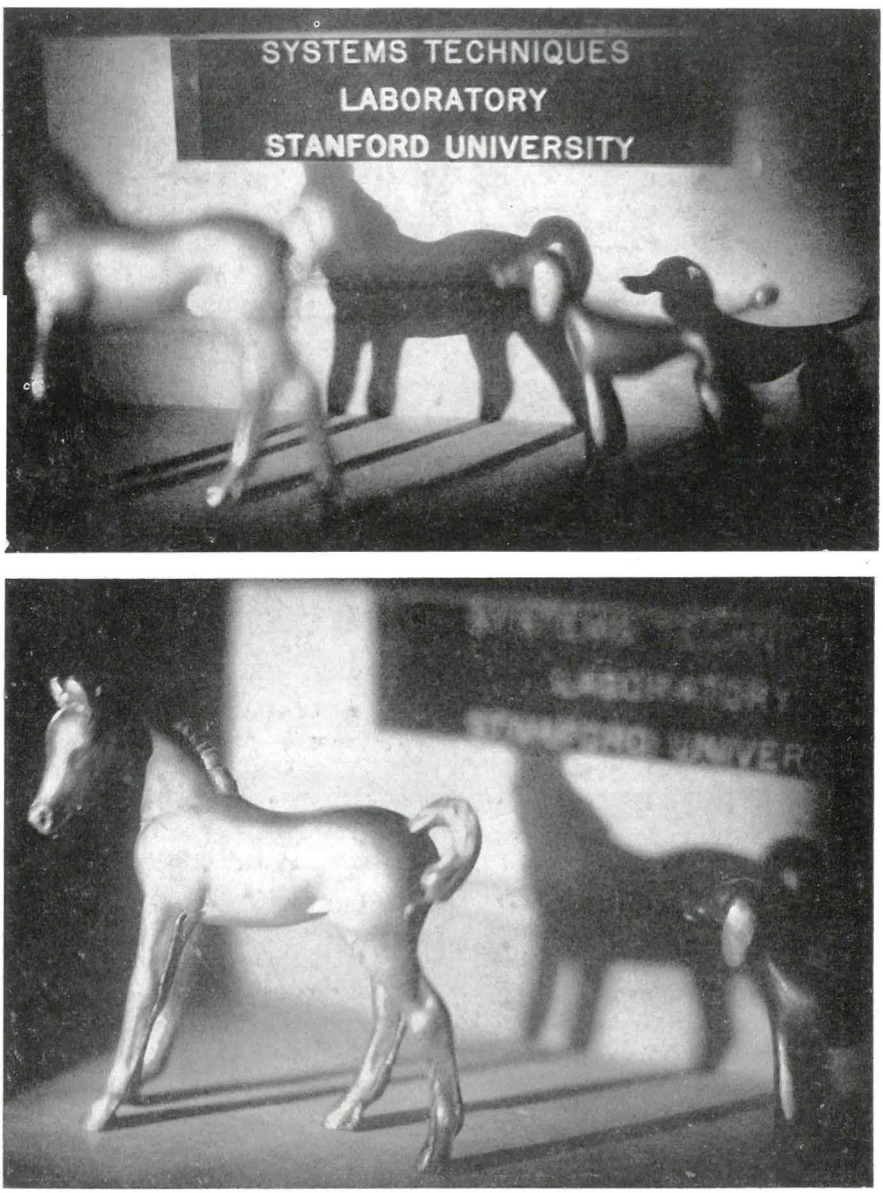


FIG. 8-15. — *Photographies montrant le caractère tridimensionnel de l'image virtuelle.*

figure 8-15*a*, la mise au point de la chambre photographique a été faite sur l'arrière-plan de l'image virtuelle; le panonceau placé à l'arrière plan est exactement au point, tandis que les figurines situées au premier plan ne sont pas nettes. On remarque que l'ombre portée du cheval est en partie cachée par la queue du cheval. On a fait ensuite la mise au point sur le premier plan et on a déplacé la chambre photographique pour changer de perspective. La figure 8-15*b* montre l'image obtenue, avec, à présent, le premier plan au point et l'arrière-plan défocalisé. La queue du cheval ne cache plus l'ombre portée de la tête du cheval, ce qui résulte du changement de perspective. Ainsi la chambre photographique a réussi à «voir derrière» la queue du cheval par un simple déplacement latéral.

Les problèmes pratiques. — Depuis la naissance de l'holographie, le problème pratique certainement le plus important a été de trouver une source possédant une cohérence et une intensité suffisamment élevées. Avec l'avènement du laser ce problème a été en grande partie résolu. En outre, la possibilité d'utiliser des sources laser a conduit à des applications nouvelles plus élaborées de l'holographie, telles que la photographie tridimensionnelle que nous venons de voir . Un grand nombre de ces applications utilisent les possibilités des lasers à émission continue de puissance relativement faible; cependant la technologie de la source demeure une préoccupation majeure pour les applications nouvelles de l'holographie.

Le procédé d'enregistrement d'un hologramme ne diffère guère des techniques de l'interférométrie. Comme dans toute expérience d'interférométrie, si l'on veut enregistrer des franges d'interférence nettes et contrastées, il est essentiel que le montage optique soit stable à une fraction de longueur d'onde près pendant le temps d'exposition. Plus l'intensité de la source est élevée, plus court est le temps de pose nécessaire, et moins les exigences de stabilité sont sévères. Le temps de pose qui convient dans chaque cas particulier dépend d'un grand nombre de facteurs, parmi lesquels le pouvoir de transmission ou de réflexion de l'objet, les distances et configurations adoptées et le film particulier utilisé. Des temps de pose très courts, d'un dixième de seconde par exemple, ou très longs, de plusieurs heures, ne sont pas exceptionnels. Dans certains cas on peut utiliser un laser pulsé comme source, avec des temps de pose de quelques nanosecondes seulement.

Les exigences expérimentales de l'holographie d'objets tridimensionnels sont parmi les plus sévères. Pour enregistrer des hologrammes de tels objets il est indispensables d'utiliser des films à résolution extrêmement élevée (on présentera au paragraphe 8-5. une discussion plus complète des exigences relatives à la résolution du film). L'émulsion la plus couramment utilisée à cet usage est la Plaque Spectroscopique Kodak type 649 F, qui a un pouvoir de résolution supérieur à 2000 traits/mm. Malheureusement, il est bien connu que les émulsions à haute résolution sont très peu sensibles (l'indice ASA équivalent à la plaque 649 F est d'environ 0,03; à titre de comparaison citons l'émulsion Tri-X dont l'indice est égal à 400). Naturellement, une faible sensibilité entraîne des temps de pose plus longs et des exigences de stabilité plus sévères.

Un autre problème pratique important dans certains cas est lié au fait que la région linéaire du récepteur photographique utilisé pour l'enregistrement est limitée. En effet, d'après la figure 7-11, la transmittance en amplitude n'est une fonction

linéaire de la lumination que dans une région limitée. Il convient donc de choisir la lumination moyenne de façon à se trouver sensiblement au milieu de la région linéaire. Cependant, lorsque l'objet est, par exemple, un cliché photographique dont la structure n'est pas très fine, il peut exister sur l'hologramme des surfaces importantes pour lesquelles la lumination est bien au-dessus ou bien au-dessous de la région linéaire de la courbe $(t-E)$. Par suite de cette non-linéarité, nous pouvons nous attendre à une certaine distorsion dans le contraste de l'image. Nous ferons au paragraphe 8-6 une étude plus détaillée des effets des non-linéarités.

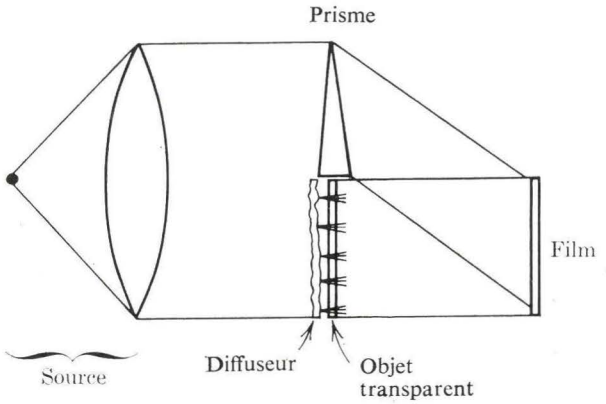


FIG. 8-16. — *Utilisation d'un éclairage diffus pour l'enregistrement d'un hologramme.*

Le problème lié à l'étendue finie de la région linéaire du récepteur peut, dans une large mesure, être résolu par une technique qui a été proposée pour la première fois par Leith et Upatnieks (réf. 8-9). L'objet est éclairé à travers un diffuseur, comme l'indique la figure 8-16. Puisque le diffuseur disperse la lumière dans un grand angle solide, la lumière provenant de chaque partie de l'objet est étalée sur la totalité de la plaque photographique. On élimine ainsi les régions de lumination trés forte ou très faible que l'on aurait obtenues, au contraire, si l'objet avait été éclairé directement. Comme on pouvait s'y attendre, l'image virtuelle obtenue dans ce cas apparaît comme éclairée par l'arrière, en éclairage diffus.

8-5. — EFFETS DE LA FTM DU FILM

Jusqu'à présent, nous avons supposé implicitement que la FTM de l'émulsion photographique utilisée pour enregistrer l'hologramme était égale à l'unité pour toutes les fréquences spatiales de la figure d'interférence qui se forme sur le film. Nous allons considérer à présent les effets de la réponse fréquentielle du film sur la qualité des images reconstruites. Nous présenterons les calculs relatifs à deux montages particulièrement importants utilisés pour l'enregistrement des hologrammes. Le lecteur intéressé par une discussion plus détaillée de ce problème se reportera aux travaux de R. F. Van Ligten (réf. 8-15 et 8-16) qui comportent l'étude de montages plus généraux.

Cas d'une onde de référence plane. Examinons d'abord les effets de la FTM du film sur la transformation des amplitudes de l'objet en amplitudes de l'image réelle, lorsqu'on utilise une onde de référence plane. Ces résultats peuvent s'appliquer à toute image réelle formée à partir de l'image virtuelle au moyen d'un système auxiliaire de lentilles.

Comme nous l'avons déjà vu, si les variations de lumination restent à l'intérieur de la région linéaire de la courbe caractéristique (t-E), la transformation de l'amplitude objet en amplitude image est linéaire (voir § 8-2). Cette linéarité n'est pas détruite pas les traitements linéaires qui atténuent cependant la réponse fréquentielle du film. Par conséquent il suffit de déterminer les effets de la FTM sur chaque composante fréquentielle de l'objet, et d'en déduire le résultat le plus général par superposition linéaire.

Pour cela, considérons l'onde de référence et l'onde objet exprimées sous la forme:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_r &= A \exp(-j2\pi\alpha y) \\ \mathbf{U}_0(x, y) &= \mathbf{a} \exp[-j2\pi(f_X x + f_Y y)] \end{aligned} \tag{8-47}$$

L'onde objet et l'onde de référence qui tombent sur l'émulsion sont donc des ondes qui se propagent dans des directions différentes. La distribution d'intensité pendant l'exposition est par suite:

$$\mathcal{I}(x, y) = A^2 + |\mathbf{a}|^2 + 2A|\mathbf{a}| \cos\{2\pi[f_X x + (f_Y - \alpha)y] + \phi\} \tag{8-48}$$

où ϕ est l'argument de $\mathbf{a}$. Si nous représentons la réponse fréquentielle de l'émulsion par:

$$\mathbf{M}(f_X, f_Y) = M(f_X, f_Y) \exp[-j\Omega(f_X, f_Y)] \tag{8-49}$$

d'après la relation (7-15) la distribution *effective* d'intensité à l'exposition est alors:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{\text{eff}}(x, y) = A^2 + |\mathbf{a}|^2 + 2A|\mathbf{a}|\, M(f_X, f_Y - \alpha) \\ \times \cos\{2\pi[f_X x + (f_Y - \alpha)y] - \Omega(f_X, f_Y - \alpha) + \phi\} \end{aligned} \tag{8-50}$$

Nous pouvons donc conclure que la composante de Fourier de l'objet de fréquences spatiales (f_X, f_Y) est *atténuée* par le facteur $M(f_X, f_Y - \alpha)$ et subit une *variation de phase* égale à $\Omega(f_X, f_Y - \alpha)$ par rapport à l'amplitude et à la phase obtenues avec une émulsion parfaite (c'est-à-dire une émulsion pour laquelle $\mathbf{M} = 1$ quelle que soit la fréquence.)

La figure 8-17 schématise ce résultat. Le spectre de l'objet est supposé centré sur la fréquence ($f_X = 0$, $f_Y = 0$). Le maximum de la FTM de l'émulsion se situe au point de coordonnées ($f_X = 0$, $f_Y = \alpha$); le produit du spectre de l'objet par la FTM du film donne le spectre de l'image.

Cette étude montre clairement que, lorsqu'on utilise une onde de référence plane, l'effet de la réponse fréquentielle du film peut être représenté par un simple facteur multiplicatif $\mathbf{M}(f_X, f_Y - \alpha)$ appliqué au spectre de l'objet. Il en résulte qu'il est possible d'associer au processus de formation de l'image une fonction de transfert cohérente:

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y) = \mathbf{M}(f_X, f_Y - \alpha)$$

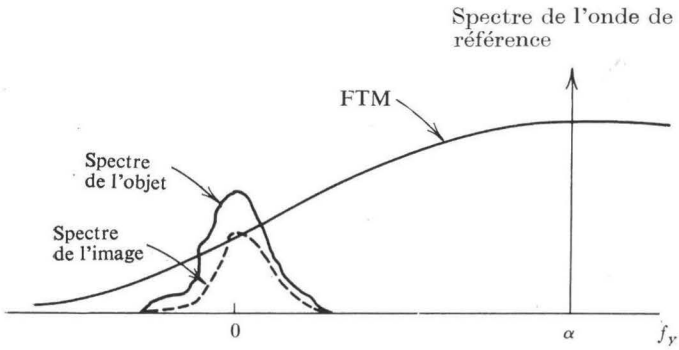


FIG. 8-17. — *Effets de la FTM du film. Cas d'une onde de référence plane.*

Cependant, la réponse en fréquences spatiales du système n'est pas seulement limitée par la FTM du film, mais aussi par les effets de la diffraction dus à l'ouverture finie du cliché. Par suite, si $P(x, y)$ représente la fonction pupillaire du cliché, c'est-à-dire si:

$$P(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{en tout point situé à l'intérieur de l'ouverture} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

la fonction de transfert cohérente complète peut s'écrire:

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y) = P(\lambda d_i f_X, \lambda d_i f_Y)\, \mathbf{M}(f_X, f_Y - \alpha) \tag{8-51}$$

où l'expression du facteur P a été obtenue directement par analogie avec la relation (6-19). Notons que l'effet de la FTM du film est équivalent à celui d'un masque atténuateur et déphasant de transmittance en amplitude:

$$\mathbf{t}(x, y) = \mathbf{M}\left(\frac{x}{\lambda d_i}, \frac{y}{\lambda d_i} - \alpha\right) \tag{8-52}$$

que l'on placerait sur la pupille d'entrée du système formant les images par reconstruction des surfaces d'ondes.

L'hologramme réalisant une transformation de Fourier sans lentille ou hologramme de Fourier. — Considérons à présent un autre dispositif d'enregistrement pour lequel les effets de la FTM du film sont notablement différents des précédents. Le montage d'enregistrement utilisé ici est représenté sur la figure 8-18; l'onde de référence est maintenant une onde sphérique qui diverge à partir d'un point situé dans le plan de l'objet. Pour des raisons qui apparaîtront bientôt, un hologramme enregistré dans ces conditions particulières peut être appelé «hologramme de Fourier» (réf. 8-17).

Pour étudier les propriétés de ce type d'hologramme, invoquons à nouveau la linéarité du processus de formation des images, mais cette fois en considérant la réponse du système à un point objet unique, et non plus à une onde objet plane. En représentant les coordonnées du point source de référence et du point objet respectivement par (x_r, y_r) et (x_0, y_0), la distribution correspondante d'amplitude dans le plan de

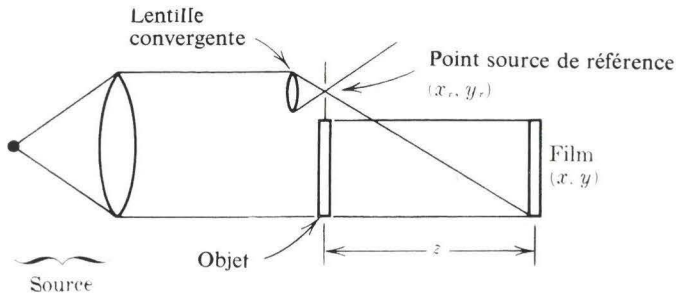


FIG. 8-18. — *Enregistrement d'un hologramme de Fourier.*

l'émulsion peut s'écrire (si on fait des approximations quadratiques), sous la forme:

$$\mathbf{U}_r(x, y) = A \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda z}[(x-x_r)^2+(y-y_r)^2]\right\}$$

$$\mathbf{U}_0(x, y) = \mathbf{a} \exp\left\{j \frac{\pi}{\lambda z}[(x-x_0)^2+(y-y_0)^2]\right\}$$

L'intensité reçue par l'émulsion durant l'exposition est ainsi:

$$\mathcal{I}(x, y) = A^2+|\mathbf{a}|^2+2A\,|\mathbf{a}|\cos\left[2\pi\frac{(x_0-x_r)x}{\lambda z}+2\pi\frac{(y_0-y_r)y}{\lambda z}+\theta(x_r,y_r;\,x_0,y_0)\right] \tag{8-53}$$

où $\theta(x_r,y_r;\,x_0,y_0)$ est un terme de phase qui dépend de $(x_r,\,y_r)$ et $(x_0,\,y_0)$ mais qui ne dépend pas des coordonnées $(x,\,y)$ dans le plan du film.

La raison de l'appellation «*hologramme réalisant une transformation de Fourier sans lentille*» ou «*hologramme de Fourier*» devient maintenant évidente. L'onde émise par le point objet de coordonnées $(x_0,\,y_0)$ interfère avec l'onde de référence pour produire un diagramme de franges d'interférences sinusoïdal de fréquences spatiales:

$$f_X = \frac{x_0-x_r}{\lambda z} \qquad f_Y = \frac{y_0-y_r}{\lambda z} \tag{8-54}$$

Ainsi, pour ce montage particulier d'enregistrement, il y a une correspondance biunivoque entre les coordonnées de l'objet et les fréquences spatiales de l'hologramme. Une telle correspondance est caractéristique de la transformation de Fourier, mais elle a été réalisée ici sans lentille.

Pour obtenir une image, on éclaire cet hologramme placé devant une lentille convergente comme l'indique la figure 8-19. La formule (8-41) où l'on fait $z_p = \infty$ et $z_0 = z_r$ montre clairement que les images jumelles produites par l'hologramme seul sont situées toutes deux à une distance infinie du cliché. La lentille convergente ramène ces images situées à l'infini dans son plan focal image: il apparaît donc deux images réelles à la distance φ de la lentille.

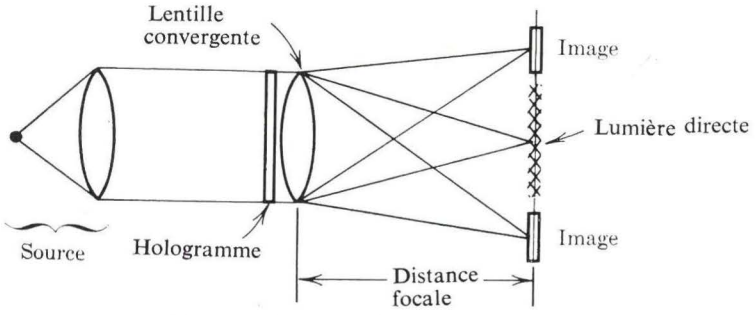


FIG. 8-19. – *Obtention des images à partir d'un hologramme de Fourier.*

Pour trouver les effets de la FTM du film sur les images reconstruites, combinons les expressions (7-15) et (8-53), ce qui donne la distribution effective d'intensité:

$$\mathcal{I}_{\text{eff}}(x, y)=A^2+|\mathbf{a}|^2+2A|\mathbf{a}|M\left(\frac{x_0-x_r}{\lambda z}, \frac{y_0-y_r}{\lambda z}\right)\cos\left[2\pi\frac{x_0-x_r}{\lambda z}x\right.$$
$$\left.+2\pi\frac{y_0-y_r}{\lambda z}y+\theta(x_r, y_r; x_0,y_0)-\Omega\left(\frac{x_0-x_r}{\lambda z}, \frac{y_0-y_r}{\lambda z}\right)\right] \quad (8\text{-}55)$$

La variation de phase Ω introduite par la FTM du film affecte seulement la phase de la vibration lumineuse au point image correspondant au point objet (x_0, y_0) et n'a par suite aucune importance. Par contre, le facteur M correspond à une *atténuation* de la lumière qui contribue à former l'image du point (x_0, y_0). Puisque les points objets les plus éloignés du point de référence produisent les franges de fréquences spatiales les plus élevées, les images de ces points sont les plus fortement atténuées.

Ainsi, dans le cas de l'enregistrement de l'hologramme de Fourier, la limitation de la réponse fréquentielle du film se traduit par une limitationdu *champ objet* autour du point de référence, mais elle n'influence pas la résolution obtenue á l'intérieur de ce champ. Si $f_{\max}$ représente sensiblement la fréquence spatiale maximale que l'émulsion peut résoudre, seuls les points de l'objet dont les coordonnées satisfont à l'inégalité:

$$\sqrt{(x_0-x_r)^2+(y_0-y_r)^2} \leqslant \lambda z f_{\max} \quad (8\text{-}56)$$

apparaîtront effectivement dans l'image. Alors que dans le cas d'une onde de référence plane l'effet du pouvoir de résolution fini du film était équivalent à celui d'un masque placé sur la pupille d'entrée (voir la relation 8-52), pour ce second type d'hologramme cet effet équivaut à celui d'un masque placé sur *l'objet* lui-même. La transmittance du masque équivalent est donné dans ce cas par:

$$\mathbf{t}(x_0, y_0) = \mathbf{M}\left(\frac{x_0-x_r}{\lambda z}, \frac{y_0-y_r}{\lambda z}\right) \quad (8\text{-}57)$$

Puisque chaque point de l'objet est effecté d'un coefficient qui dépend de ses coordonnées particulières, le système n'est pas invariant par translation et, en toute rigueur, on ne peut pas lui associer de fonction de transfert cohérente. Cependant,

d'un point de vue pratique, il est possible de diviser l'espace objet en régions dites *isoplanétiques* qui sont suffisamment petites pour que l'expression (8-57) soit approximativement constante dans chacune de ces régions. Dans ce cas, la fonction de transfert cohérente peut s'écrire:

$$\mathbf{H}(f_X, f_Y) \cong \mathbf{M}P(\lambda d_i f_X, \lambda d_i f_Y) \tag{8-58}$$

où **M** est la valeur particulière de l'expression (8-57) pour la région isoplanétique considérée et où P est, ici encore, la fonction pupillaire qui représente la pupille effective du système.

Dispositifs d'enregistrement plus généraux. — Une étude complète relative au dispositif d'enregistrement le plus général représenté par la figure 8-10, a été faite par Van Ligten (réf. 8-16) mais il serait trop long de la reprendre ici. Cette analyse montre que les effets de la FTM du film sont dans tous les cas équivalents à ceux d'un masque possédant encore une transmittance en amplitude proportionnelle à **M**, réalisé avec une échelle convenable, et placé en un certain plan situé entre l'objet et le film. La position particulière du masque équivalent dépend du montage utilisé pour l'enregistrement. Les deux montages examinés en détail dans ce paragraphe représentent simplement les cas limites pour lesquels le masque est placé contre la pupille d'entrée dans le premier cas, et contre l'objet dans le deuxième cas.

Pour davantage de précisions concernant les effets de la fonction de transfert de modulation du film, le lecteur consultera les références citées; il trouvera également des indications complémentaires dans le problème 8-5.

8-6. — EFFETS DES NON-LINÉARITÉS DU FILM

Jusqu'à présent nous avons constamment supposé que l'hologramme était exposé de telle sorte que le point de fonctionnement sur la caractéristique (t-E) de l'émulsion reste dans la partie rectiligne. En réalité, les films et les plaques photographiques ne sont jamais parfaitement linéaires, l'écart à la linéarité dépendant dans une large mesure de l'importance des *variations* de la lumination incidente. Nous présentons dans ce paragraphe une brève discussion des effets des non-linéarités du film sur l'image reconstruite. Soulignons que lorsque la lumination moyenne produite par l'objet est comparable à celle que produit l'onde de référence, ce sont peut-être les effets dus à la non-linéarité qui limitent le plus sérieusement la qualité de l'image. Ce cas s'oppose à celui d'un objet peu lumineux pour lequel le «bruit» dû au grain du film constitue généralement le facteur de limitation (réf. 8-18).

Le modèle de Kozma. — Kozma a étudié un modèle très utile pour l'analyse des effets des non-linéarités du film sur les surfaces d'onde reconstruites par holographie (réf. 8-19). Abordant ce problème dans l'esprit de la théorie des communications, Kozma considère l'émulsion photographique comme un élément d'un système non-linéaire (réf. 8-20 et 8-21). La grandeur d'entrée de cet élément est la distribution de lumination incidente pendant l'exposition . La grandeur de sortie est la distribution de transmittance en amplitude du cliché développé.

Pour des raisons de simplicité, supposons que l'onde de référence soit plane, et écrivons l'onde de référence et l'onde objet respectivement sous la forme:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_r(x, y) &= A \exp(-j2\pi\alpha y) \\ \mathbf{U}_0(x, y) &= a(x, y) \exp[-j\phi(x, y)] \end{aligned} \tag{8-59}$$

La lumination totale peut donc s'écrire:

$$\begin{aligned} E(x, y) &= |\mathbf{U}_r(x, y)+\mathbf{U}_0(x, y)|^2 T \\ &= A^2T+a^2(x, y)T+2Aa(x, y)\, T\cos[2\pi\alpha y-\phi(x, y)] \end{aligned} \tag{8-60}$$

où T est le temps de pose. Nous pouvons considérer cette distribution de lumination comme composée d'une lumination sensiblement uniforme $E_r = A^2T$, due à la référence, et d'une lumination variable $E_1(x, y)$ telle que:

$$E_1(x, y) = a^2(x, y)T+2Aa(x, y)T\cos[2\pi\alpha y-\phi(x, y)] \tag{8-61}$$

La transmittance en amplitude $t(x, y)$ du cliché développé peut être représentée par une transmittance «moyenne» t_b sensiblement constante due à la référence et par des variations de transmittance $t_1(x, y)$. Ainsi:

$$t(x, y) = t_b+t_1(x, y) \tag{8-62}$$

La linéarité du processus est déterminée par la manière dont t_1 dépend de E_1, c'est-à-dire par la fonction $t_1(E_1)$. Nous verrons qu'il est plus commode d'utiliser la fonction:

$$g(E_1) = -t_1(E_1) \tag{8-63}$$

La figure (8-20) montre dans un cas très général l'allure des fonctions $t(E)$, $t_1(E_1)$ et enfin $g(E_1)$.

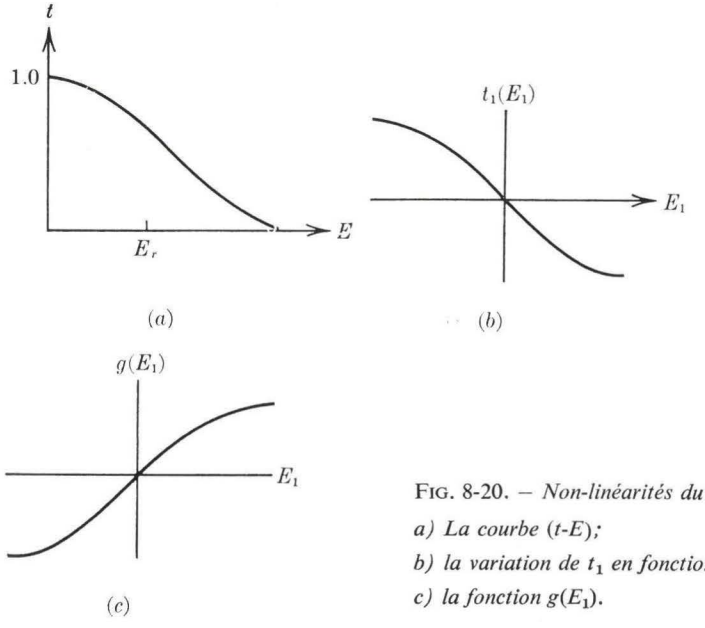


FIG. 8-20. – *Non-linéarités du film:*
a) La courbe (t-E);
b) la variation de t_1 en fonction de E_1;
c) la fonction $g(E_1)$.

Voyons maintenant en détail le modèle de Kozma représenté par la figure 8-21. La lumination constante E_r est soustraite de $E(x, y)$ et le reste $E_1(x, y)$ est appliqué à l'élément non-linéaire dont la caractéristique est $g(E_1)$. La grandeur de sortie $g(E_1)$ de cet élément est soustraite de la transmittance constante t_b pour donner la transmittance globale en amplitude $t(x, y)$. Il reste, évidemment, à trouver l'effet de la transformation non-linéaire $g(E_1)$ sur les ondes transmises par le cliché.

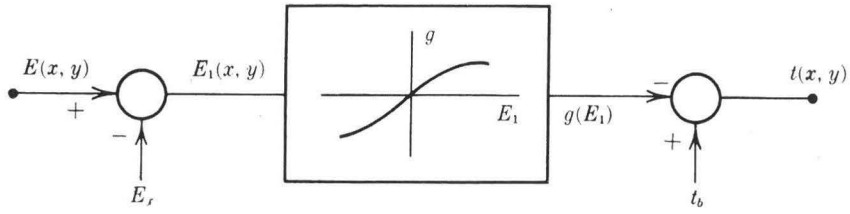


FIG. 8-21. — *Le modèle de Kozma.*

La méthode d'analyse par transformation. Il est possible d'analyser le modèle de Kozma par la méthode de la théorie des communications dite «par transformation» (réf. 8-20 et 8-21). Cette méthode est basée sur un schéma purement mathématique. Définissons la transformée de Fourier de la caractéristique non-linéaire $g(E_1)$ par:

$$\mathbf{G}(f) = \int_{-\infty}^{\infty} g(E_1) \exp(-j2\pi f E_1)\, \mathrm{d}E_1 \tag{8-64}$$

Cette transformée n'a pas de signification physique réelle, car elle n'est pas le «spectre» d'une fonction du temps ou de l'espace au sens usuel de ce terme. Néanmoins son intérêt apparaît clairement lorsqu'on exprime $g(E_1)$ à l'aide de sa transformée $\mathbf{G}(f)$:

$$\begin{aligned} g(E_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(f) \exp(j2\pi f E_1)\, \mathrm{d}f \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(f) \exp[j2\pi f a^2(x, y)T] \exp\{j4\pi f A a(x, y)\, T \cos[2\pi\, \alpha y - \phi(z,y)]\}\, \mathrm{d}f \end{aligned}$$

Le second facteur exponentiel peut être développé à l'aide de la formule de Jacobi-Anger (réf. 8-22):

$$\exp(j\gamma \cos\theta) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu j^\nu J_\nu(\gamma) \cos \nu\theta \tag{8-65}$$

où ε_ν est le facteur de Neumann:

$$\varepsilon_\nu = \begin{cases} 1 & \nu = 0 \\ 2 & \nu > 0 \end{cases} \tag{8-66}$$

et où J_ν est une fonction de Bessel de première espèce, d'ordre ν. Ainsi:

$$g(E_1) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu j^\nu \left[\int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(f) \exp(j2\pi f a^2 T)\, J_\nu(4\pi T A a f)\, \mathrm{d}f \right] \cos(2\pi\nu\, \alpha y - \nu\phi)$$

et finalement:

$$t(x, y) = t_b - \sum_{\nu=0}^{\infty} H_\nu[a(x, y)] \cos [2\pi\nu\alpha y - \nu\phi(x, y)] \tag{8-67}$$

où

$$H_\nu[a(x, y)] = \varepsilon_\nu j^\nu \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{G}(f) \exp (j2\pi f a^2 T)\, J_\nu(4\pi T A a f)\, \mathrm{d}f \tag{8-68}$$

La forme du résultat (8-67) est riche d'enseignements. Le terme pour lequel $\nu = 1$ est la composante qui correspond aux images réelle et virtuelle classiques. La modulation de phase $\phi(x, y)$ de cette composante est identique à la modulation de phase de la lumination incidente, et c'est pourquoi elle n'a pas été affectée par la non-linéarité. Par contre la modulation d'amplitude a subi une distorsion traduite par la fonction non-linéaire $H_1[a(x, y)]$ qui, en principe, peut être évaluée pour toute fonction non-linéaire $g(E_1)$.

D'autre part, il apparaît des harmoniques de l'onde porteuse de fréquence spatiale α. La fréquence de l'onde porteuse du $\nu^{\text{ième}}$ harmonique est $\nu\alpha$, ce qui entraîne que les ondes produites par ces harmoniques se propagent suivant des directions de plus en plus inclinées par rapport à la direction de la lumière non diffractée. La modulation de phase du $\nu^{\text{ième}}$ harmonique est simplement égale à ν fois la modulation de phase incidente, et la modulation d'amplitude est la fonction non-linéaire $H_\nu[a(x, y)]$ de la modulation d'amplitude incidente $a(x, y)$. On peut considérer que ces harmoniques produisent des images «d'ordre supérieur» de l'objet original, quoique de telles images présentent en général une forte distorsion du fait des distributions incorrectes d'amplitude et de phase des ondes correspondantes.

Après avoir trouvé la forme générale de la transmittance du cliché non-linéaire, il nous resterait à traiter deux autres types de problèmes: (1) l'évaluation des fonctions $H_\nu(a)$ pour quelques modèles satisfaisants de fonction non-linéaire $g(E_1)$ et (2) la détermination les effets de ces distorsions *sur les images* elles-mêmes, au lieu de se limiter à l'étude de ces effets sur les composantes de l'onde transmise. Nous ne traiterons ici en détail aucun de ces problèmes. Cependant nous considèrerons des cas particuliers de chacun d'eux au cours de la discussion qui suit, relative au film à caractéristique (t-E) restangulaire. D'autre part, le lecteur peut consulter les travaux de Kozma (réf. 8-19) dans lesquels on utilise pour déterminer la fonction H_ν un modèle dont la caractéristique (t-E) *est la fonction d'erreur.*

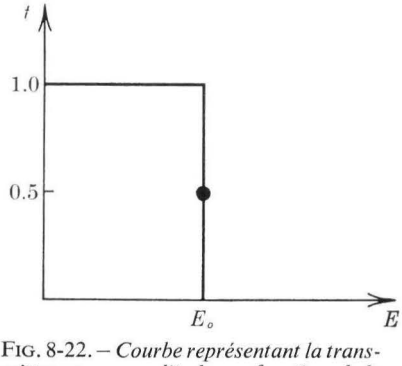


FIG. 8-22. – *Courbe représentant la transmittance en amplitude en fonction de la lumination, pour un film à caractéristique rectangulaire.*

Une méthode d'analyse directe: cas d'une caractéristique rectangulaire. — Bien que la méthode d'analyse par transformation soit séduisante du fait de sa généralité, dans certains cas on peut obtenir aisément des résultats simples en abordant le problème directement. Un exemple de cette méthode directe est présenté ici dans le cas du *film à caractéristi-*

que rectangulaire. Nous désignons ainsi un film dont la transmittance en fonction de la lumination est représentée par la figure 8-22. Pour toutes les luminations inférieures à un certain seuil E_0 la transmittance en amplitude demeure égale à l'unité, tandis que pour des luminations supérieures à E_0 cette transmittance est nulle. Un tel modèle n'est, au mieux, qu'une approximation grossière d'un film à gamma très élevé. Il constitue peut-être une meilleure approximation de la caractéristique non-linéaire que l'on rencontre lorsqu'un hologramme est analysé et converti électroniquement du système analogique au système digital à deux niveaux.

Pour étudier ce modèle faisons deux hypothèses principales. Supposons d'abord que la «fréquence porteuse» α de l'expression (8-60) soit plus élevée que les largeurs de bande en fréquences spatiales de $a(x, y)$ et $\phi(x, y)$. Si c'est le cas, dans toute région peu étendue par rapport aux largeurs de bande spectrales de $a(x, y)$ et de $\phi(x, y)$, la lumination peut être considérée comme la somme d'un terme sensiblement constant E_r+a^2T et de franges sinusoïdales de fréquence spatiale α, d'amplitude sensiblement constante $2AaT$ et de phase ϕ. Choisissons ensuite la lumination de référence E_r juste égale à la valeur du seuil de lumination E_0. La transformation des variations de lumination en variations de transmittance peut être alors décrite par:

$$t\begin{cases} 1 & \text{lorsque} \quad a^2T+2AaT\cos(2\pi\alpha y-\phi) < 0 \\ \dfrac{1}{2} & \text{lorsque} \quad a^2T+2AaT\cos(2\pi\alpha y-\phi) = 0 \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

La figure 8-23 représente l'action non-linéaire du film et définit les grandeurs importantes qui interviennent. Représentons la période de la fonction transmittance $t(y)$ par $L = \alpha^{-1}$ et la largeur de l'impulsion de transmittance, d'amplitude unité, par l. La distance du centre de l'impulsion à l'origine des y est, à une constante près, $\dfrac{\phi L}{2\pi}$. Remarquons que la modulation d'amplitude sinusoïdale $a(x, y)$ de la lumination incidente n'est pas complètement éliminée par l'effet de cette caractéristique rectangulaire, car elle modifie la largeur l des impulsions de transmittance. Ainsi l'information relative à l'amplitude est conservée, avec de la distorsion sans aucun doute, grâce à une *modulation de la transmittance par des impulsions de largeur variable*. De la même façon, la modulation de phase $\phi(x, y)$ affecte la position des impulsions de transmittance par rapport à l'origine des espaces. Ainsi l'information relative à la phase est conservée sous forme d'une *modulation par impulsions de position variable*.

Avant de déterminer les effets de la non-linéarité sur les différentes composantes de l'onde transmise par l'hologramme, déterminons la relation exacte entre la largeur l de l'impulsion et l'amplitude a des ondes objet incidentes. On peut trouver cette relation à l'aide de la figure 8-24. Notons d'abord que l'angle de phase θ défini dans la partie (*a*) de la figure est donné par:

$$\theta = \frac{2\pi}{L}\,\frac{l}{2} \tag{8-69}$$

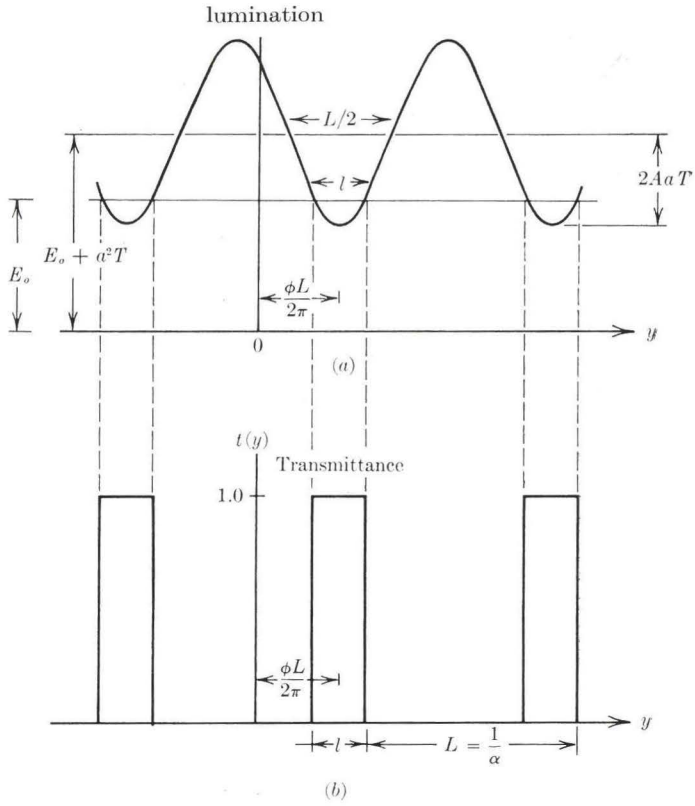


FIG. 8-23. – *La transformation non-linéaire des variations de lumination (courbe a) en variations de transmittance (courbe b).*

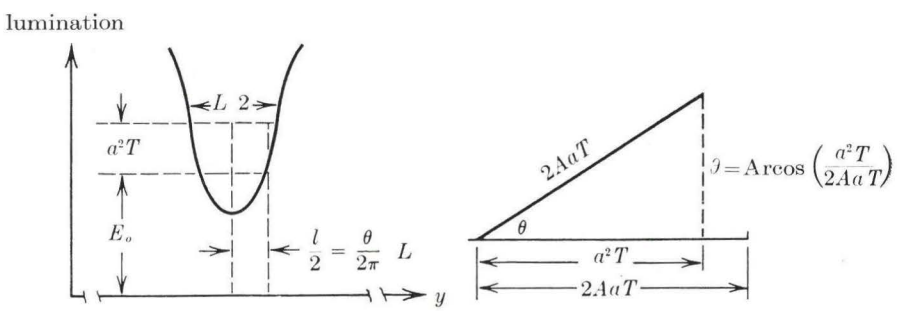


FIG. 8-24. – *Détermination de la largeur de l'impulsion l.*

De plus, la représentation graphique des amplitudes complexes dans la partie (*b*) montre que θ est donné par:

$$\theta = \text{Arcos}\left(\frac{a^2T}{2aAT}\right) = \text{Arcos}\left(\frac{a}{2A}\right) \tag{8-70}$$

Par suite, en combinant (8-69) et (8-70):

$$l = \frac{L}{\pi} \operatorname{Arcos}\left(\frac{a}{2A}\right) \tag{8-71}$$

Ce résultat illustre la façon non-linéaire par laquelle la modulation d'amplitude $a(x, y)$ est convertie en une modulation par impulsion de largeur $l(x, y)$.

Pour déterminer la modulation de phase et d'amplitude des différentes composantes de l'onde transmise par l'hologramme, adoptons une méthode dite de «*bande étroite*», en faisant l'analyse de Fourier de la transmittance $\mathbf{t}(x, y)$ comme si elle était parfaitement périodique en y et indépendante de x, et en admettant donc que les fonctions a et ϕ varient lentement dans la solution. Une telle méthode est précise si la première des deux hypothèses que nous avons énoncées plus haut est satisfaite. La fonction périodique $\mathbf{t}(x, y) = \mathbf{t}(y)$ se développe en série de Fourier:

$$\mathbf{t}(y) = \sum_{v=-\infty}^{\infty} \mathbf{C}_v \exp\left(j \frac{2\pi v}{L} y\right) \tag{8-72}$$

où:

$$\mathbf{C}_v = \frac{1}{L} \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} \mathbf{t}(y) \exp\left(-j \frac{2\pi v}{L} y\right) \mathrm{d}y \tag{8-73}$$

Par le changement de variable $y' = y - \dfrac{\phi L}{2\pi}$ on centre l'impulsion de transmittance à l'origine du système de coordonnées en y', ce qui donne:

$$\mathbf{C}_v = \frac{\exp(-jv\phi)}{L} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \exp\left(j \frac{2\pi v y'}{L}\right) \mathrm{d}y' \tag{8-74}$$

En effectuant l'intégration nous obtenons:

$$\mathbf{C}_v = \begin{cases} \dfrac{l}{L} & v = 0 \\ \dfrac{1}{\pi v} \sin\left(\pi v \dfrac{l}{L}\right) \exp(-jv\phi) & \text{pour } v \neq 0 \end{cases} \tag{8-75}$$

En combinant ce résultat aux relations (8-71) et (8-72) nous trouvons[1]:

$$\mathbf{t}(x, y) = \frac{1}{\pi} \operatorname{Arcos}\left(\frac{a}{2A}\right) + \sum_{v=1}^{\infty} \frac{2}{\pi v} \sin\left[v \operatorname{Arcos}\left(\frac{a}{2A}\right)\right] \cos(2\pi v \alpha y - v\phi) \tag{8-76}$$

[1] Ce résultat très simple et la manière directe de l'obtenir ont été proposés à l'auteur par son élève Gordon Knight.

étant bien entendu que a et ϕ sont des fonctions lentement variables de (x, y). Si l'on compare ce résultat à l'expression précédente (8-67), obtenue par la méthode d'analyse «par transformation», il apparaît que les fonctions relatives au film à caractéristique rectangulaire sont données par:

$$H_\nu(a) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\pi} \operatorname{Arcos}\left(\dfrac{a}{2A}\right) & \text{pour } \nu = 0 \\ -\dfrac{2}{\pi\nu} \sin\left[\nu \operatorname{Arcos}\left(\dfrac{a}{2A}\right)\right] & \text{pour } \nu > 0 \end{cases} \tag{8-77}$$

La composante de Fourier la plus intéressante est celle qui engendre les images du premier ordre, c'est-à-dire la composante pour laquelle $\nu = 1$. En remarquant que:

$$\sin\left[\operatorname{Arcos}\left(\frac{a}{2A}\right)\right] = \sqrt{1 - \left(\frac{a}{2A}\right)^2} \tag{8-78}$$

nous voyons immédiatement que la composante correspondante de la transmittance est:

$$\mathbf{t}_1(x, y) = \frac{2}{\pi}\sqrt{1 - \left[\frac{a(x, y)}{2A}\right]^2} \cos\left[2\pi\alpha y - \phi(x, y)\right] \tag{8-79}$$

Ainsi la modulation d'amplitude de l'onde porteuse subit une distorsion représentée par la figure 8-25*a*, tandis que la modulation de phase n'est pas altérée. Notons que

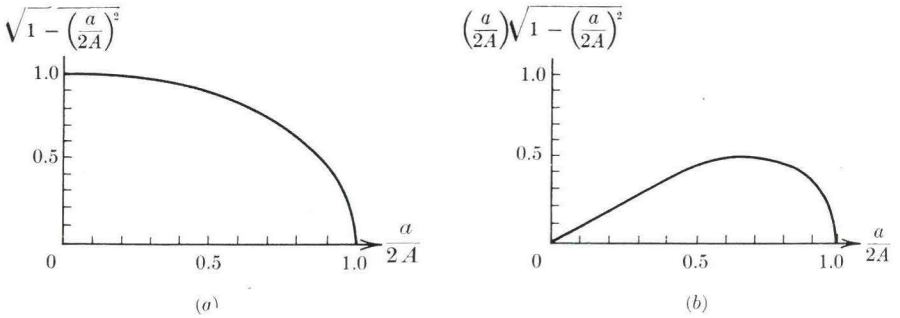


FIG. 8-25. – *Distorsion de la modulation d'amplitude: a) pour la composante du premier ordre b) pour la composante du second ordre.*

si $a \ll 2A$, toute modulation d'amplitude est supprimée et le film se comporte exactement comme un *filtre à bande passante* de la théorie des communications (réf. 8-20, p. 288). Cependant, lorsque a est de l'ordre de grandeur de $2A$, le niveau moyen variable a^2T introduit par l'onde objet se traduit par la présence d'une distorsion dans la modulation d'amplitude de $\mathbf{t}_1$.

Pour terminer, considérons la composante de la transmittance qui engendre les images du second ordre:

$$\mathbf{t}_2(x, y) = \frac{1}{\pi} \sin\left[2 \operatorname{Arcos}\left(\frac{a}{2A}\right)\right] \cos\left[2\pi(2\alpha)y - 2\phi\right] \tag{8-80}$$

En utilisant la relation:

$$\sin\left[2\,\text{Arcos}\left(\frac{a}{2A}\right)\right] = 2\sin\left[\text{Arcos}\left(\frac{a}{2A}\right)\right]\cos\left[\text{Arcos}\left(\frac{a}{2A}\right)\right]$$

$$= \frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{2A}\right)^2} \tag{8-81}$$

nous trouvons:

$$\mathbf{t}_2(x, y) = \frac{1}{\pi}\frac{a}{A}\sqrt{1-\left(\frac{a}{2A}\right)^2}\cos\left[2\pi(2\alpha)y - 2\phi\right] \tag{8-82}$$

La distorsion de la modulation d'amplitude pour cette composante de l'onde est représentée par la figure 8-25*b*. Notons que pour $\frac{a}{2A}$ petit, la modulation d'amplitude ne subit pas de distorsion! Cependant la modulation de phase est le double de ce qu'elle devrait être, et par conséquent, on doit s'attendre à trouver de la distorsion dans l'image du second ordre. Nous renvoyons le lecteur au problème 8-7: il y trouvera l'illustration d'une technique au moyen de laquelle on peut retrouver à la fois la modulation d'amplitude correcte et la modulation de phase correcte lorsque $a \ll 2A$.

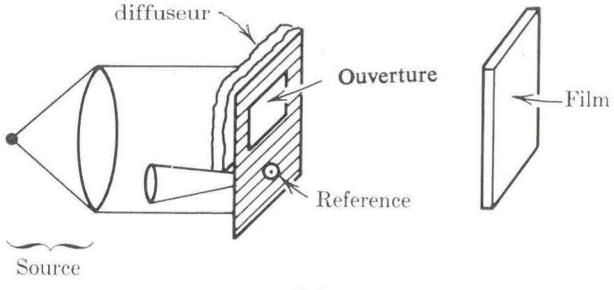
Effets des non-linéarités sur les images reconstruites. — La détermination des effets des non-linéarités sur les images reconstruites elles-mêmes est en général un problème difficile que nous ne traiterons pas en détail ici. On peut faire cependant un certain nombre de remarques simples.

Tout d'abord, pour un film à caractéristique rectangulaire exposé de telle sorte que $a \ll 2A$, on peut utiliser plusieurs propriétés bien connues du filtre à bande passante de la théorie des communications (réf. 8-23) pour prévoir les effets des non-linéarités sur l'image du premier ordre. Cette méthode a été utilisée par Friesem et Zelenka (réf. 8-24) qui ont montré plusieurs effets importants à la fois par le calcul et par l'expérience. Si l'objet se compose de deux points sources, l'un ayant une amplitude plus grande que l'autre, on constate, en accord avec la théorie, la disparition des signaux faibles: l'image du point source le plus faible n'apparaît pas. En outre, à cause des effets d'intermodulation, de fausses images peuvent être engendrées par l'interaction des deux sources ponctuelles; ceci produit des images de sources ponctuelles qui ne figurent pas réellement dans l'objet.

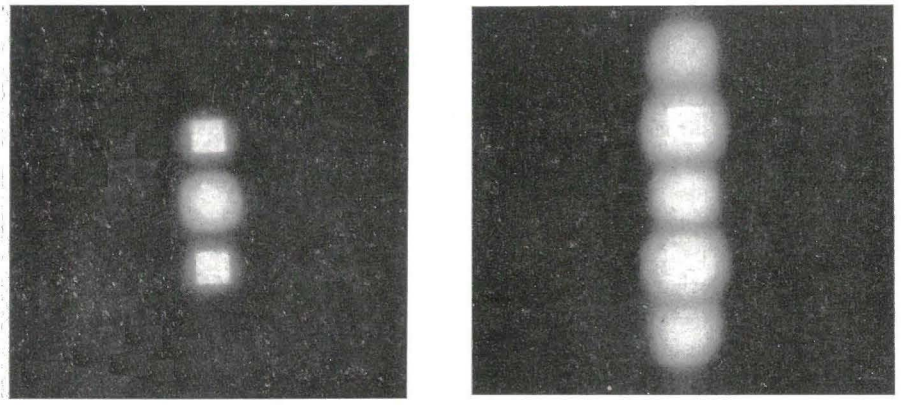
Les effets de non-linéarité introduits par le film lorsque l'objet est éclairé en lumière diffuse ont également été étudiés (réf. 8-25 et 8-26). Dans ce cas, la meilleure façon de traiter le problème est de considérer la lumination comme un phénomène aléatoire en employant des techniques d'analyse qui dépassent le cadre de notre étude. Pour plus de détails le lecteur peut consulter les références déjà citées.

Nous présentons, pour terminer, des photographies qui illustrent la nature des dégradations de l'image que l'on rencontre dans la pratique. La figure 8-26*a* représente le schéma du montage utilisé pour enregistrer les hologrammes, L'objet est simplement une ouverture carrée, percée dans un écran opaque, éclairée à travers un diffuseur. La référence provient d'un point situé dans le plan de l'objet; on utilise ainsi le montage par transformation de Fourier sans lentille. L'hologramme est

enregistré sur Plaque Spectroscopique Kodak 649 F. Le rapport de l'intensité de référence à l'intensité objet dans le plan d'enregistrement est compris dans tous les cas entre 1,4 et 1. Sur la figure 8-26*b* nous voyons les deux images du premier ordre (plus le terme d'ordre zéro) obtenues lorsque la lumination moyenne est choisie de telle sorte que la transmittance en amplitude au point de fonctionnement soit égale



(a)



(b) *(c)*

FIG. 8-26. — *Effects des non-linéarités sur les images reconstruites: a) Dispositif d'enregistrement b); Images obtenues lorsque* $t_b = 0{,}5$*; c) Images obtenues lorsque* $t_b = 0{,}24$.

à 0,5. Cette valeur particulière permet d'utiliser au maximum la partie linéaire de la courbe (*t-E*); aussi les effets non-linéaires sont-ils tout à fait négligeables. La figure 8-26*c* montre les images obtenues quand on augmente le temps de pose de telle manière que la transmittance au point de fonctionnement soit égale à 0,24, les autres facteurs (notamment le rapport référence-objet) restant inchangés. Dans ce cas, on se trouve dans un domaine fortement non-linéaire de la courbe (*t-E*), et le résultat apparaît clairement. D'abord, on observe aisément la présence de termes du second ordre. Mais, fait plus important, les images du premier ordre apparaissent à présent comme formées d'une image nette de l'objet qui se superpose à un large halo. On peut facilement attribuer la présence de ce fond continu à la distorsion d'intermodulation due aux propriétés non-linéaires du film (réf. 8-26).

8-7. — EFFETS DE L'ÉPAISSEUR DE L'ÉMULSION

On a supposé dans les discussions précédentes que l'émulsion photographique avait une épaisseur négligeable et que l'enregistremenet d'un hologramme était strictement un phénomène de «surface». En fait, l'émulsion a toujours une épaisseur non nulle et il importe d'étudier les effets éventuels de cette épaisseur sur le processus de formation des images.

A titre d'exemple caractéristique, l'émulsion de la Plaque Spectroscopique Kodak type 642 F, largement utilisée en holographie, a une épaisseur d'environ 16 microns (1 micron $= 10^{-6}$ mètre). A première vue cette épaisseur pourrait sembler négligeable; cependant, on doit se rappeler que la période des franges qui se forment sur la surface de l'émulsion est souvent de l'ordre de grandeur de la longueur d'onde optique, qui, pour la raie rouge habituelle du laser He-Ne est d'environ 0,6 micron. Ainsi l'épaisseur de l'émulsion peut parfois dépasser 20 interfranges. Dans de telles conditions on doit nécessairement tenir compte de l'aspect «volumique» du processus d'enregistrement. Notre présentation de cette étude s'inspire fortement de celle de Collier (réf. 8-10) à laquelle le lecteur se reportera pour plus de détails.

L'hologramme élémentaire. — Considérons d'abord le cas trés simple d'une onde de référence plane et d'une onde objet plane tombant sur une émulsion d'épaisseur non négligeable. On peut considérer que ces deux ondes simples produisent un hologramme élémentaire.

Dans la figure 8-27, on suppose pour simplifier que les deux normales aux ondes (représentées par des flèches) forment chacune un angle $\frac{\theta}{2}$ avec la normale à la surface, l'angle qu'elles forment entre elles étant égal à θ. On a représenté sur la

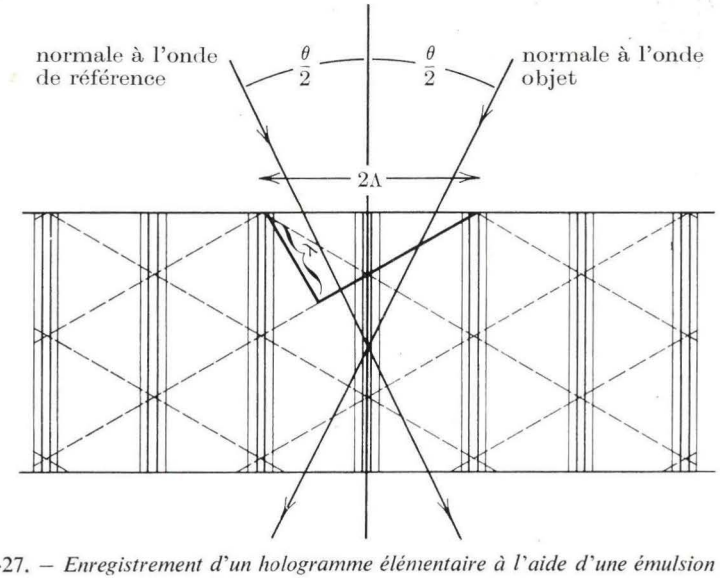


FIG. 8-27. — *Enregistrement d'un hologramme élémentaire à l'aide d'une émulsion épaisse.*

figure, en pointillés, les traces des surfaces d'onde de phase nulle; deux de ces surfaces d'ondes consécutives sont distantes d'une longueur d'onde. A l'intérieur de l'émulsion, le long des droites d'intersection de deux surfaces d'onde (c'est-à-dire aux points d'intersection des traces de ces ondes sur la figure) les ondes sont en phase et leurs amplitudes s'ajoutent ce qui donne une lumination élevée. Au cours du temps, les surfaces d'onde se propagent dans la direction de leur normale, et les droites d'interférence constructive se déplacent dans l'émulsion en engendrant des *plans* de lumination élevée. Une étude géométrique simple montre que ces plans sont bissecteurs de l'angle θ formé par les normales aux deux ondes et qu'ils sont disposés périodiquement à l'intérieur de l'émulsion.

Quand on développe la plaque photographique des atomes d'argent apparaissent sous forme de *strates* dans les plans de forte lumination. Dans le triangle en trait épais sur la figure 8-27, on voit aisément que la distance Λ de ces strates d'argent satisfait à la relation:

$$2\Lambda \sin \frac{\theta}{2} = \lambda \tag{8-83}$$

La condition de Bragg. – Supposons que nous essayions de reconstruire le plan objet original en éclairant l'hologramme élémentaire à l'aide d'une onde plane de *reconstruction*. La question qui se pose naturellement est de savoir quel angle de reconstruction nous devons utiliser pour obtenir une onde objet reconstruite présentant une intensité maximale. Pour répondre à cette question, nous pouvons considérer chaque strate d'argent comme un miroir partiellement réfléchissant qui dévie une partie de l'onde plane incidente selon les lois habituelles de la réflexion. Si l'onde plane incidente tombe sur le système de strates sous un angle ψ, comme le montre la figure 8-28, les ondes planes réfléchies se propagent dans la direction indiquée. Cependant si on veut que les différentes ondes planes réfléchies soient *en phase*, il est nécessaire que les chemins optiques parcourus par les ondes réfléchies par deux strates consécutives diffèrent exactement d'une longueur d'onde[1].

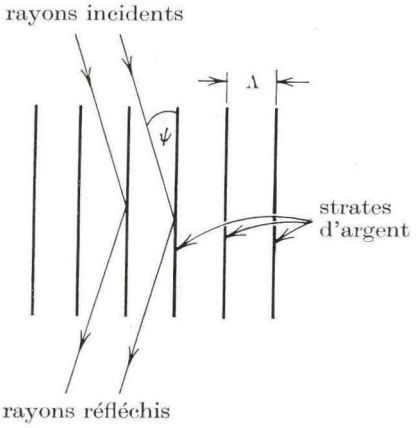


FIG. 8-28. – *Réflexion des rayons sur les strates d'argent.*

Des considérations géométriques simples faites sur la figure 8-28, montrent que cette condition ne sera satisfaite que si l'angle d'incidence satisfait à la *condition de Bragg*:

$$\sin \psi = \pm \frac{\lambda}{2\Lambda} \tag{8-84}$$

[1] A des différences de chemin optique égales à un nombre *entier* quelconque de longueurs d'onde correspondent aussi des interférences constructives. Nous ne considérons ici que la condition du premier ordre pour laquelle la différence est égale à une longueur d'onde.

La comparison des relations (8-83) et (8-84) montre que l'intensité maximale ne sera obtenue que si:

$$\psi = \begin{cases} \pm\dfrac{\theta}{2} & \text{ou} \\ \pm\left(\pi - \dfrac{\theta}{2}\right) \end{cases} \tag{8-85}$$

Ce résultat est très important car il indique que *pour obtenir une reconstruction de l'onde objet originale présentant une luminance maximale, l'hologramme doit être éclairé par une onde identique à l'onde de référence utilisée à l'enregistrement* $\left(\psi = +\dfrac{\theta}{2}\right)$. Cette onde reconstruite produit une image virtuelle de l'objet. Nous voyons aussi qu'en éclairant l'hologramme par l'onde objet originale, on obtient une onde identique

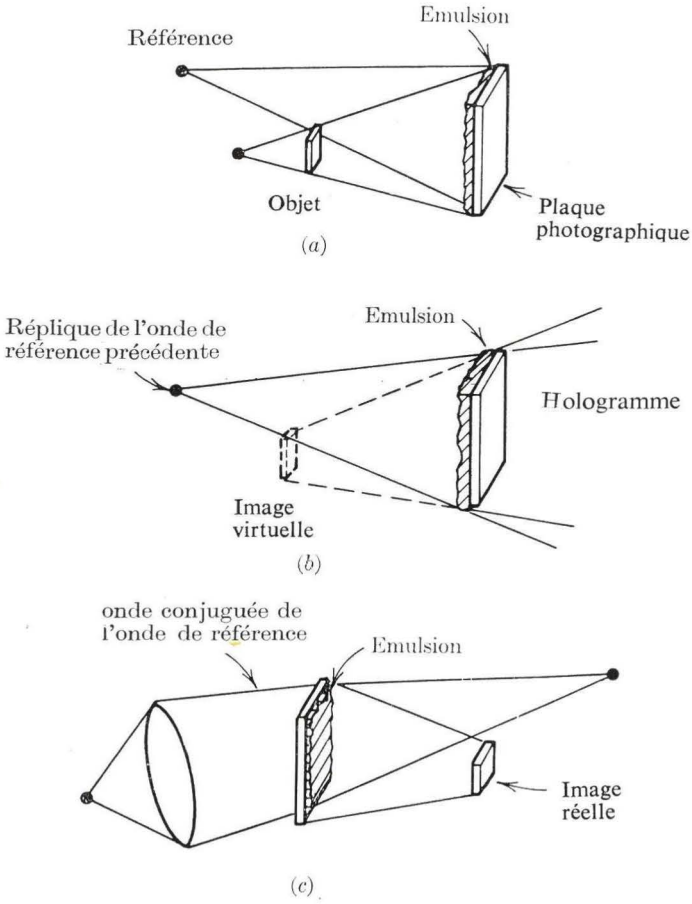


FIG. 8-29. – *Obtention des images réelle et virtuelle à partir d'un hologramme «épais» a) enregistrement de l'hologramme, b) obtention de l'image réelle, c) obtention de l'image virtuelle.*

à l'onde de référence $\left(\psi = -\frac{\theta}{2}\right)$. En outre, la condition de Bragg est satisfaite pour des ondes se propageant dans la direction opposée à celle des ondes d'origine. Si l'hologramme est éclairé par une onde se propageant dans la direction opposée à celle de l'onde de référence $\left[\psi = -\left(\pi - \frac{\theta}{2}\right)\right]$ l'onde plane objet produite se propage alors dans la direction opposée à celle qu'elle avait à l'enregistrement. Cette onde objet «conjuguée» conduit à une image réelle de l'objet. De même on peut obtenir une image réelle de la référence en éclairant l'hologramme par l'onde conjuguée de l'onde objet $\left(\psi = \pi - \frac{\theta}{2}\right)$.

Le point essentiel de toute cette discussion est le suivant: lorsque l'émulsion est «épaisse» on n'obtient des images réelles ou virtuelles de luminance maximale que si l'hologramme est convenablement éclairé. Si l'on veut obtenir l'image virtuelle, on doit éclairer l'hologramme par une réplique exacte de l'onde de référence. Pour obtenir une image réelle, on doit éclairer l'hologramme (sur la face opposée) par une onde conjuguée de l'onde de référence. Ces résultats sont indiqués sur la figure 8-29 dans le cas simple où l'onde de référence est sphérique et divergente.

Pour terminer, notons que toute émulsion peut se comporter soit comme un réseau de diffraction superficiel caractéristique d'une émulsion *mince*, soit comme un ensemble volumique de strates d'argent caractéristique d'une émulsion *épaisse*. La question de savoir lesquels des effets superficiels ou des effets volumiques prédominent dépend de l'épaisseur de l'émulsion et du spectre angulaire d'ondes planes auquel elle est exposée. On peut admettre la règle empirique suivante: l'émulsion peut être considérée comme mince si son épaisseur L est très inférieure à la plus petite période Λ de l'ensemble des strates d'argent et on peut la considérer comme épaisse si $L \gg \Lambda$. Il existe évidemment un domaine intermédiaire où les effets de Bragg, bien que présents, ne sont pas particulièrement perceptibles.

8-8. — GÉNÉRALISATIONS

Dans ce paragraphe nous présentons rapidement un certain nombre de généralisations des résultats précédents. Le lecteur intéressé par ces questions pourra se reporter aux références indiquées.

Holographie des objets en mouvement (réf. 8-27). — Nous avons supposé jusqu'à présent que, dans tous les cas, les distributions de l'onde de référence et de l'onde objet étaient constantes dans le temps, au moins pendant la durée du temps de pose. Dans certains cas l'objet peut se déplacer au cours du temps, et il en résulte que le diagramme d'interférences se modifie pendant le temps de pose. Nous allons à présent généraliser la théorie précédente afin de tenir compte des effets du mouvement de l'objet.

Supposons que la source de référence soit monochromatique; par suite, l'onde de référence tombant sur le film s'écrit en notation complexe:

$$\mathbf{U}_r(x, y; t) = \mathbf{A}(x, y) \exp(-j2\pi\nu_0 t) \tag{8-86}$$

L'onde objet, dont l'amplitude complexe est fonction du temps, s'écrit en notation complexe:

$$\mathbf{U}_0(x, y; t) = \mathbf{a}(x, y; t) \exp(-j2\pi\nu_0 t) \tag{8-87}$$

La lumination totale est donc:

$$E(x, y) = E_r(x, y) + E_0(x, y) + \mathbf{A}(x, y) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathbf{a}^*(x, y; t)\, dt + \mathbf{A}^*(x, y) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathbf{a}(x, y; t)\, dt \tag{8-88}$$

où E_r et E_0 sont les luminations que produiraient la référence et l'objet agissant séparément, et où T est le temps de pose.

Considérons la composante de la lumination qui donne naissance à l'image virtuelle:

$$\mathbf{E}'(x, y) = \mathbf{A}^*(x, y) \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \mathbf{a}(x, y; t)\, dt \tag{8-89}$$

Cette expression contient toute l'information nécessaire pour prévoir les effets du mouvement de l'objet sur l'image. Cependant, dans bien des cas, il est plus commode de transposer ce résultat dans le domaine des fréquences. De façon plus précise, nous pouvons écrire, en utilisant le tableau 2-1:

$$\mathbf{E}'(x, y) = \mathbf{A}^*(x, y) \int_{-\infty}^{\infty} \text{rect}\left(\frac{t}{T}\right) \mathbf{a}(x, y; t)\, dt$$

soit d'après le théorème de Parseval généralisé (réf. 8-28):

$$\mathbf{E}'(x, y) = \mathbf{A}^*(x, y) T \int_{-\infty}^{\infty} \text{sinc}(T\nu)\, \mathbf{G}_a(x, y; \nu)\, d\nu \tag{8-90}$$

où $\mathbf{G}_a(x, y; \nu)$ est défini par:

$$\mathbf{G}_a(x, y; \nu) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{a}(x, y; t) \exp(-j2\pi\nu t)\, dt \tag{8-91}$$

D'après l'expression (8-90) il apparaît clairement que l'effet d'un temps de pose uniforme de durée T secondes est équivalent à celui d'un filtrage linéaire de $\mathbf{a}(z,y; t]$ par un système dont la fonction de transfert (temporelle) est:

$$\mathbf{H}(\nu) = \text{sinc}(T\nu) \tag{8-92}$$

L'interprétation de ce résultat est la suivante: si l'onde provenant d'un point donné de l'objet a en tout point du film une fréquence temporelle qui diffère de ν périodes/seconde de celle de la référence, *l'intensité* du point correspondant est alors atténuée par un facteur $\text{sinc}^2(T\nu)$.

Ce résultat trouvera une application au cours de notre étude relative à l'analyse des vibrations au paragraphe 8-9. Pour d'autres applications, le lecteur pourra consulter la référence originale (réf. 8-27).

Holographie en lumière spatialement incohérente. — Bien que l'holographie ait été conçue initialement comme un moyen de formation d'images en lumière cohérente, il existe à l'heure actuelle certaines techniques au moyen desquelles on peut enregistrer des hologrammes d'objets éclairés en lumière incohérente. L'extension de l'holographie au cas de la lumière incohérente a été suggérée pour la première fois par Mertz et Young (réf. 8-29). L'étude théorique et expérimentale de l'holographie incohérente a été ensuite développée par Lohmann (réf. 8-30), Stroke et Restrick (réf. 8-31) et Cochran (réf. 8-32).

La lumière provenant d'un point quelconque d'un objet éclairé de façon incohérente, n'interfère évidemment pas avec la lumière provenant d'un autre point de l'objet. Cependant, si, au moyen d'un artifice convenable, on divise l'onde issue de chaque point objet en deux parties, il est alors possible de faire interférer le couple d'ondes provenant d'un même point et de former un système de franges. Ainsi chaque point objet peut être codé sous forme d'un système de franges convenable, et si le codage est tel que deux points objets ne puissent pas produire deux systèmes de franges identiques, on peut alors obtenir, en principe, une image de l'objet.

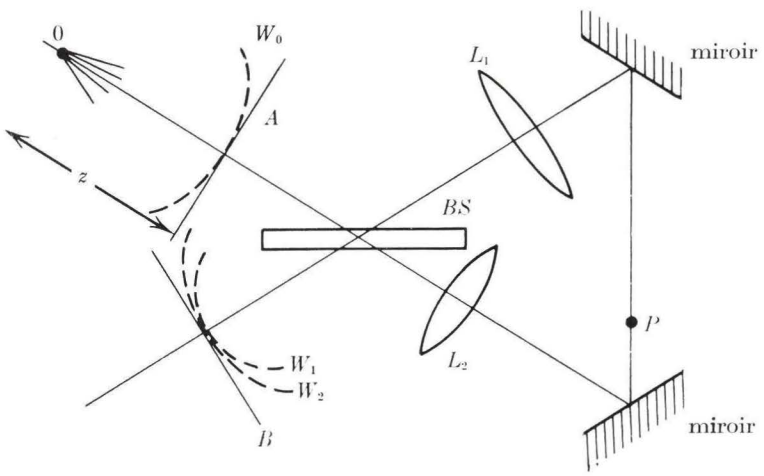


FIG. 8-30. — *Interféromètre triangulaire pour l'holographie incohérente.*

Il existe divers systèmes optiques permettant de réaliser la division des ondes issues de l'objet (réf. 8-30 et 8-31); nous donnons ici à titre d'exemple le dispositif proposé par Cochran (réf. 8-32). Comme le montre la figure 8-30, le système est constitué par un interféromètre triangulaire dans lequel sont placées deux lentilles L_1 et L_2 de distances focales différentes φ_1 et φ_2. Nous supposons içi que les deux lentilles sont convergentes, bien qu'on puisse aussi utiliser une combinaison d'une lentille convergente et d'une lentille divergente. Les lentilles sont séparées par le chemin optique $\varphi_1+\varphi_2$, leurs foyers coïncidant au point P de la figure. Le plan A et le plan B sont situés tous deux à la distance φ_1 de la lentille L_1 et à distance φ_2 de la lentille L_2.

La lumière peut aller, à l'intérieur de l'interféromètre, du plan A au plan B en suivant deux trajets, l'un dans le sens des aiguilles d'une montre, le second en sens inverse. Dans le premier trajet, la lumière parcourt une distance φ_1 du plan A à L_1

grâce à la réflexion sur une lame séparatrice BS; de L_1 à L_2 le chemin optique est $\varphi_1+\varphi_2$ et de L_2 au plan B le chemin est φ_2 (grâce à une nouvelle réflexion sur BS). Par suite du choix de la valeur particulière du chemin optique en fonction des distances focales φ_1 et φ_2, l'image du plan A se forme dans le plan B; pour ce trajet, le grandissement de l'image est égal à $M_1 = -\dfrac{\varphi_2}{\varphi_1}$, en raison de l'ordre dans lequel la lumière rencontre les lentilles L_1 et L_2.

Pour le trajet effectué en sens inverse, la lumière est dans chaque cas transmise par la lame séparatrice, et non plus réfléchie. L'image du plan A se forme à nouveau sur le plan B, mais ici la lumière rencontre les lentilles dans l'ordre inverse et le grandissement est $M_2 = -\dfrac{\varphi_1}{\varphi_2}$.

Considérons à présent le point particulier 0 (fig. 8-30) d'un objet éclairé en lumière incohérente et situé à la distance z du plan A. L'onde sphérique W_0 de la figure 8-30, émise par le point 0, a pour expression complexe:

$$\mathbf{U}_a(x, y) = \mathbf{U}_0 \exp\left[j\frac{\pi}{\lambda z}(x^2+y^2)\right] \tag{8-93}$$

si on choisit l'origine des phases au point de contact de W_0 et A. Dans le plan B nous trouvons deux ondes sphériques (les ondes W_1 et W_2 de la figure 8-30), l'une grandie dans le rapport $M_1 = -\varphi_2/\varphi_1$, l'autre dans le rapport $M_2 = -\varphi_1/\varphi_2$. L'amplitude résultante est donc:

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_b(x, y) = \mathbf{U}_1 \exp\left\{j\frac{\pi}{\lambda z}\left[\left(\frac{x}{M_1}\right)^2+\left(\frac{y}{M_1}\right)^2\right]\right\} \\ +\mathbf{U}_2 \exp\left\{j\frac{\pi}{\lambda z}\left[\left(\frac{x}{M_2}\right)^2+\left(\frac{y}{M_2}\right)^2\right]\right\}\end{aligned} \tag{8-94}$$

En utilisant la relation:

$$\frac{1}{M_1^2}-\frac{1}{M_2^2} = \frac{\varphi_1^4-\varphi_2^4}{\varphi_1^2\varphi_2^2}$$

la distribution d'intensité prend la forme:

$$\mathcal{I}_b(x, y) = |\mathbf{U}_1|^2+|\mathbf{U}_2|^2+2\,|\mathbf{U}_1|\cdot|\mathbf{U}_2|\cos\left[\frac{\pi}{\lambda z}\left(\frac{\varphi_1^4-\varphi_2^4}{\varphi_1^2\varphi_2^2}\right)(x^2+y^2)+\psi\right] \tag{8-95}$$

Si la plaque photographique reçoit la distribution d'intensité (8-95) et si on la développe de manière à obtenir un cliché positif dont la transmittance en amplitude soit proportionnelle à la lumination, la transmittance résultante peut s'écrire:

$$\begin{aligned}\mathbf{t}(x, y) = \mathbf{t}_b+\beta'\mathbf{U}_1\mathbf{U}_2^* \exp\left\{j\left[\frac{\pi}{\lambda z}\left(\frac{\varphi_1^4-\varphi_2^4}{\varphi_1^2\varphi_2^2}\right)(x^2+y^2)\right]\right\} \\ +\beta'\mathbf{U}_1^*\mathbf{U}_2 \exp\left\{-j\left[\frac{\pi}{\lambda z}\left(\frac{\varphi_1^4-\varphi_2^4}{\varphi_1^2\varphi_2^2}\right)(x^2+y^2)\right]\right\}\end{aligned} \tag{8-96}$$

Nous reconnaissons dans le deuxième et le troisième termes respectivement les fonc-

tions de transmittance d'une lentille divergente et d'une lentille convergente (cf. éq. 5-10), de distance focale:

$$\varphi = \frac{\varphi_1^2 \varphi_2^2}{\varphi_1^4 - \varphi_2^4} \tag{8-97}$$

Ainsi, lorsque le cliché est éclairé par une source cohérente, il se forme simultanément une image virtuelle et une image réelle du point source 0.

On peut étendre maintenant ce résultat à un objet constitué par un grand nombre de points sources mutuellement incohérents, chacune de ces sources produisant son propre système de franges sur le film. Comme les différentes sources ne sont pas cohérentes, l'intensité totale s'obtient simplement en additionnant les différentes distributions d'intensité produites. Les coordonnées (x, y) de chaque point source déterminent le centre du système de franges correspondant, et fixent par suite les coordonnées (x, y) des images réelle et virtuelle. De même, la coordonnée z du point source influe sur la distance focale équivalente qui intervient dans la fonction transmittance (relation 8-97); l'image formée est ainsi une image tridimensionnelle.

Bien que l'utilisation d'un éclairage incohérent plutôt que d'un éclairage cohérent soit séduisante en vue de nombreuses d'applications, il existe un problème pratique sérieux qui a limité jusqu'à présent l'utilisation de l'holographie incohérente. Ce problème résulte du fait que chaque système de franges élémentaire est formé par interférence de deux portions extrêmement faibles de la lumière totale tombant sur le film. Alors que dans le cas de l'holographie *cohérente* la lumière provenant de chaque point de l'objet interfère avec toute la lumière apportée par la source de référence, en holographie *incohérente* les ondes qui interfèrent représentent seulement une portion minuscule de la lumière totale. Ainsi on a toujours une lumination «moyenne» élevée. Il en résulte que l'holographie incohérente n'a été appliquée avec succès qu'à des objets composés d'un nombre relativement faible de cellules de résolution. L'avenir de l'holographie incohérente repose dans une large mesure sur l'invention de techniques simples pour résoudre ce problème.

Hologrammes par réflexion. — En modifiant convenablement les techniques de l'holographie cohérente, il est possible d'obtenir des images en éclairant les hologrammes enregistrés en lumière cohérente quasi-monochromatique par de la «lumière blanche». Dans ce cas, les surfaces d'ondes reconstruites sont obtenues par réflexion sur l'hologramme, et non plus par transmission. Cette technique utilise les propriétés tridimensionnelle de l'émulsion photographique et s'apparente étroitement, à de nombreux égards, à la méthode de photographie en couleurs de Lippmann (réf. 8-33).

Les principes de cette technique d'holographie furent présentés pour la première fois en 1962 par Y. N. Denisyuk en U.R.S.S. (réf. 8-34). Ils ne furent pleinement appréciés aux Etats-Unis que lors des publications de Stroke et Labeyrie (réf. 8-35) et de Lin et coll. (réf. 8-36) en 1966. Une étude assez complète de ce type d'holographie a été présentée par Leith et ses collaborateurs (réf. 8-37).

Lors de l'engistrement d'un hologramme par réflexion, l'onde provenant de l'objet et l'onde de référence, cohérentes, tombent *chacune sur une face* de l'émulsion photographique comme le montre la figure 8-31*a*. Comme nous l'avons déjà vu au paragraphe 8-7, l'interférence des deux ondes produit (après développement photogra-

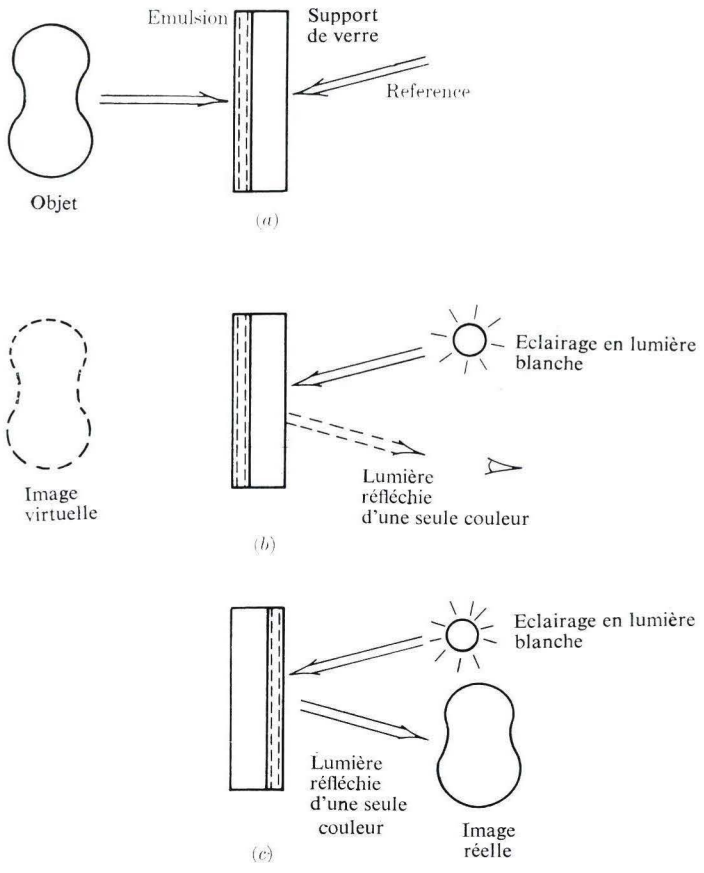


FIG. 8-31. — *Holographie par réflexion: a) enregistrement de l'hologramme, b) obtention d'une image virtuelle, c) obtention d'une image réelle.*

phique) un cliché contenant des couches stratifiées d'argent métallique qui jouent le rôle de plans réflecteurs. Puisque l'angle θ est voisin de 180°, les plans réflecteurs (qui sont bissecteurs de θ) sont à peu près parallèles à la surface de l'émulsion. L'espacement de ces plans est, d'après l'équation (8-83):

$$\Lambda \cong \frac{\lambda}{2} \tag{8-98}$$

Pour obtenir une image virtuelle de l'objet, nous devons éclairer le cliché développé par une onde semblable à l'onde de référence. Comme l'indique la figure 8-31*b*, l'onde objet originale est alors restituée, ce qui signifie que dans ce cas l'image est formée par la *lumière réfléchie*. Notons également que pour une disposition d'éclairage et d'observation données, il n'y a qu'une valeur de la longueur d'onde de reconstruction qui satisfasse à la loi de Bragg. Par suite, si on utilise une lumière blanche, la radiation dont la longueur d'onde satisfait à la loi de Bragg est réfléchie, tandis que les autres traversent l'émulsion ou sont partiellement absorbées.

Pour obtenir une image réelle, on doit éclairer le cliché sur la face opposée, et l'image se forme encore grâce à la lumière monochromatique réfléchie, comme le montre la figure 8-31*c*.

En principe, on devrait obtenir des images dont la couleur soit sensiblement la même que celle de la lumière utilisée pour enregistrer l'hologramme. En pratique, la longueur d'onde de la lumière réfléchie est inférieure à celle de la lumière utilisée à l'enregistrement; ceci est dû au fait que l'émulsion se «tasse» au cours du développement et du fixage, et que les couches d'argent sont plus serrées que prévu. Si l'on désire reproduire la longueur d'onde d'origine comme c'est le cas évidemment en holographie multicolore (réf. 8-36), il faut alors prendre des précautions pour éviter ce tassement. En supprimant le fixage on élimine en grande partie ce tassement mais les plaques ainsi développées se détériorent lentement. La solution la plus satisfaisante consiste peut-être à utiliser certaines techniques de gonflement de l'émulsion après le fixage. Par une utilisation judicieuse de ces techniques, on peut faire en sorte que l'émulsion réfléchisse une radiation de longueur d'onde déterminée à l'intérieur d'une région spectrale étendue.

La photographie de la figure 8-32 est l'image virtuelle produite par un hologramme par réflexion. L'hologramme a été enregistré grâce à la lumière d'un laser hélium-néon de longueur d'onde égale à 6328 Å. En l'absence de traitement particulier de l'émulsion, l'hologramme, après fixage, réfléchit de la lumière verte.

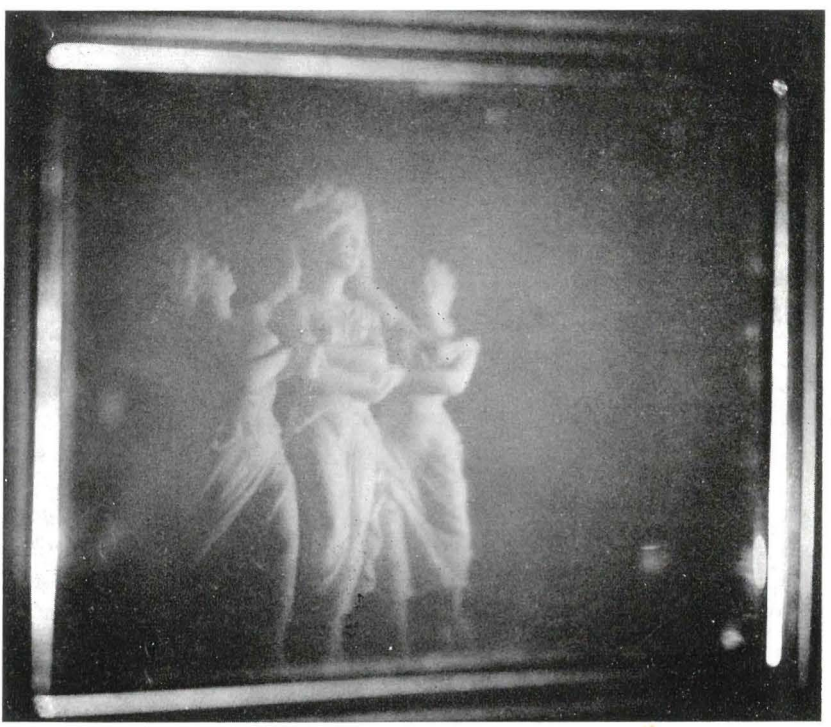


FIG. 8-32. — *Photographie de l'image virtuelle produite par un hologramme par réflexion éclairé en lumière blanche.*

8-9. — APPLICATIONS DE L'HOLOGRAPHIE

Les perfectionnements apportés depuis le début des années 60 au procédé de reconstruction des surfaces d'onde ont conduit à un nombre sans cesse croissant d'applications de l'holographie. Nous considérons ici plusieurs de ces applications, parmi les plus importantes, tout en nous limitant à l'holographie *optique*; le lecteur ne doit cependant pas ignorer que des applications de ce procédé se développent aussi bien dans le domaine des micro-ondes et des radio-fréquences (voir par exemple la référence 8-38) que dans le domaine de la formation d'images acoustiques (réf. 8-39).

Microscopie. — Historiquement, c'est la possibilité d'utiliser l'holographie en microscopie qui a suscité la plupart des recherches préliminaires concernant la reconstruction des surfaces d'onde; c'est, sans aucun doute, la microscopie qui a motivé les premiers travaux de Gabor (réf. 8-1; 8-3; et 8-4) et de El-Sum (réf. 8-6).

A l'heure actuelle, on a découvert un nombre si grand d'applications de l'holographie que la microscopie ne peut plus être considérée comme la motivation principale qu'elle a constitué autrefois. En outre, bien que la possibilité d'utiliser des hologrammes en microscopie ait été largement démontrée, il est clair que ces techniques nouvelles ne concurrencent pas sérieusement le microscope classique, en microscopie ordinaire de routine. Néanmoins, il existe véritablement deux domaines dans lesquels l'holographie offre des possibilités spécifiques à la microscopie. Le premier domaine est celui de la *formation d'images tridimensionnelles à haute résolution*; cette question sera traitée plus en détail dans un paragraphe ultérieur. En microscopie classique, on n'obtient une résolution «latérale» élevée qu'au prix d'une profondeur de champ limitée. Par contre les hologrammes offrent en microscopie la possibilité de réaliser une profondeur de champ énorme, qui résulte de leur aptitude à former des images tridimensionnelles.

Un deuxième domaine d'applications à la microscopie, encore trop peu développé pour juger de son intérêt, est celui de l'utilisation possible d'hologrammes à la construction d'un microscope à rayons X. Le principe fondamental consiste ici à enregistrer un hologramme en utilisant des rayons X et à reconstruire l'image à l'aide de lumière visible. On peut obtenir des grandissements énormes grâce à ce changement de longueur d'onde (voir l'équation 8-46), mais chose plus importante, l'utilisation des rayons X pourrait conduire à des résolutions de quelques angströms (1 Å $= 10^{-10}$ mètre) étant donné leur longueur d'onde. De telles résolutions sont comparables à celles que l'on peut obtenir en microscopie électronique, mais l'emploi de rayons X produirait un échauffement moindre de l'échantillon que dans le cas d'un faisceau d'électrons, et permettrait aussi d'éviter d'opérer sous vide comme en microscopie électronique. Le succès ou l'échec de la microscopie holographique à rayons X repose sans aucun doute sur les progrès à venir de la technologie des sources et des récepteurs de rayons X.

Interférométrie. — L'holographie permet de concevoir plusieurs méthodes d'interférométrie vraiment originales. La possibilité de faire de l'interférométrie par reconstruction des surfaces d'onde repose sur le fait que les images formées sont *cohé-*

rentes, puisqu'elles ont des distributions d'amplitude et de phase bien définies. Toute utilisation de l'holographie pour superposer deux images cohérentes constitue donc une méthode possible d'interférométrie.

Les techniques les plus puissantes d'interférométrie holographique sont basées sur la propriété suivante, soulignée par Gabor et ses collaborateurs (réf. 8-40): on peut réaliser l'addition cohérente d'ondes complexes par exposition multiple d'un hologramme. On peut aisément démontrer cette propriété de la manière suivante: une émulsion photographique reçoit successivement N distributions différentes d'intensité $\mathcal{J}_1, \mathcal{J}_2 \ldots \mathcal{J}_N$; la lumination totale de l'émulsion peut s'écrire:

$$E = \sum_{k=1}^{N} T_k \mathcal{J}_k \tag{8-99}$$

où $T_1, T_2, \ldots, T_N$ sont les N temps de pose correspondants. Supposons à présent que pendant chacun des temps de pose, l'onde incidente soit la somme d'une onde de référence déterminée $\mathbf{A}(x, y)$ et de l'onde objet $\mathbf{a}_k(x, y)$ qui change à chaque pose. La lumination totale devient:

$$E = \sum_{k=1}^{N} T_k |\mathbf{A}|^2 + \sum_{k=1}^{N} T_k |\mathbf{a}_k|^2 + \sum_{k=1}^{N} T_k \mathbf{A}^* \mathbf{a}_k + \sum_{k=1}^{N} T_k \mathbf{A} \mathbf{a}_k^* \tag{8-100}$$

En supposant que l'on opère dans la partie linéaire de la caractéristique (t-E) de l'émulsion, nous trouvons une composante de la transmittance de la forme:

$$\mathbf{t}_\alpha = \beta' \sum_{k=1}^{N} T_k \cdot \mathbf{A}^* \mathbf{a}_k \tag{8-101}$$

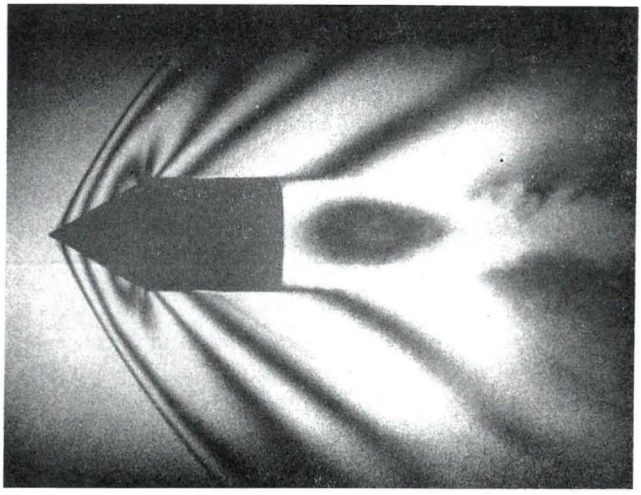
et une composante de la forme:

$$\mathbf{t}_\beta = \beta' \sum_{k=1}^{N} T_k \mathbf{A} \mathbf{a}_k^* \tag{8-102}$$

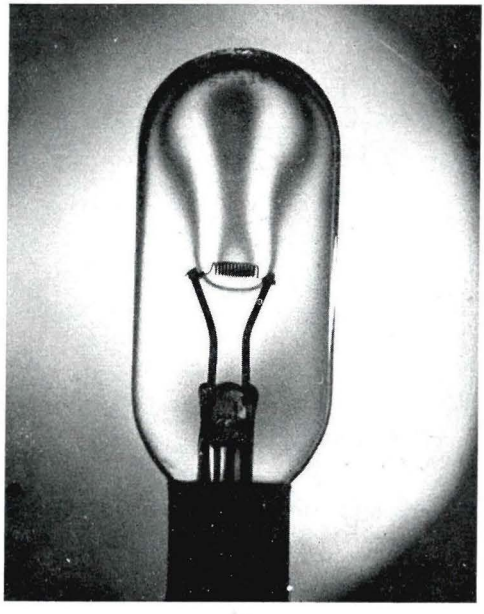
La relation (8-101) montre que si l'on éclaire le cliché par l'onde $\mathbf{A}$, il apparaîtra une composante de l'onde transmise proportionnelle à une somme pondérée des ondes complexes $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_N$. Il en résulte que les N images virtuelles cohérentes des objets originaux produisant les amplitudes $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_N$ se superposeront linéairement et, naturellement, interfèreront entre elles.

De la même façon, si l'on éclaire le cliché par l'onde $\mathbf{A}^*$, il produira d'après la relation (8-102) N images réelles cohérentes qui interfèreront également.

Les démonstrations les plus spectaculaires des possibilités de ce type d'interférométrie ont été réalisées par Brooks et ses collaborateurs (réf. 8-41) en utilisant un laser à rubis déclenché. La figure 8-33 montre deux photographies obtenues chacune par double exposition d'un hologramme grâce à deux impulsions du laser. Dans le cas de la photographie de la figure 8-33*a*, la première impulsion a servi à enregistrer l'hologramme d'un diffuseur seul, tandis que la seconde impulsion a permis d'enregistrer l'hologramme d'une balle en vol devant le même diffuseur. Les ondes de choc engendrées par la balle modifient l'indice de réfraction de l'air. Il en résulte que les deux images du diffuseur, l'une enregistrée en l'absence de la balle et la seconde



a)



b)

FIG. 8-33. — *Interférométrie holographique à l'aide d'un laser à rubis déclenché (Avec l'autorisation de R. E. Brooks, L. O. Heflinger et R. F. Wuerker).*

enregistrée alors que l'indice de réfraction de l'air est perturbé, interfèrent entre elles pour donner des franges qui dessinent les ondes de choc produites par la balle. Ces franges semblent être figées dans l'espace à trois dimensions autour de la balle.

La partie (*b*) de la figure 8-33 est l'image d'une lampe à incandescence obtenue de la même manière. Pendant la première pose le courant ne passe pas dans le filament et, ici encore, on enregistre un hologramme du diffuseur, cette fois à travers l'enveloppe de verre de la lampe. On fait alors passer le courant dans le filament et on expose

à nouveau l'hologramme grâce à une seconde impulsion du laser. La lumière incohérente produite par la lampe ne peut pas interférer avec la lumière du laser, si bien que le filament ne paraît pas incandescent sur l'image finale. Cependant, l'échauffement des gaz contenus dans l'enveloppe a produit des modifications de l'incide de réfraction, qui engendrent des franges d'interférence dans l'image finale, esquissant les effets de la dilatation du gaz. On doit souligner que ces franges d'interférence ont été obtenues en présence de l'enveloppe de verre optiquement imparfaite; ceci aurait été impossible par tout autre méthode «classique» d'interférométrie.

Analyse des vibrations. — Powell et Stetson ont été les premiers à proposer une technique holographique destinée à l'analyse des vibrations (réf. 8-42). Cette technique peut être considérée comme une généralisation de l'interférométrie à exposition multiple au cas d'un objet en vibration et d'une exposition continue.

On peut donner aisément une explication de cette méthode à l'aide des propriétés de filtrage temporel des hologrammes, établies au paragraphe (8-8). Dans le montage représenté sur la figure 8-34, considérons un point de coordonnées (x_0, y_0) apparte-

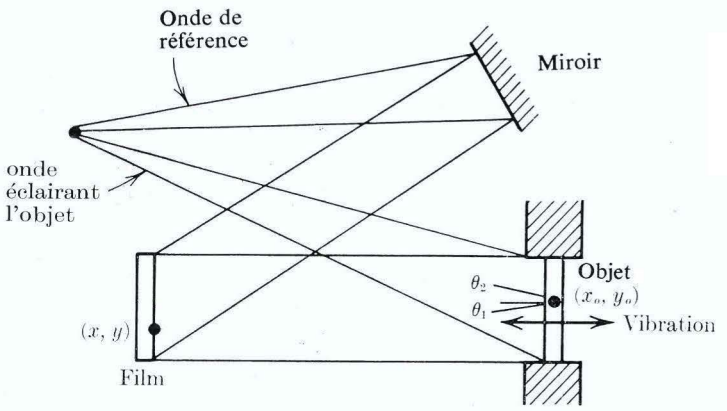


FIG. 8-34. — *Enregistrement de l'hologramme d'un objet en vibration.*

nant à un objet plan qui vibre sinusoïdalement avec la pulsation Ω. Représentons l'amplitude de la vibration par $m(x_0, y_0)$ et sa phase à l'origine par $\mu(x_0, y_0)$. On peut considérer que la lumière provenant de ce point objet et tombant sur le film au point de coordonnées (x, y), possède la modulation de phase, fonction du temps:

$$\phi(x, y; t) = \frac{2\pi}{\lambda}(\cos\theta_1 + \cos\theta_2)\, m(x_0, y_0) \cos[\Omega t + \mu(x_0, y_0)] \qquad (8\text{-}103)$$

où λ est la longueur d'onde de la lumière émise par la source, θ_1 l'angle du vecteur déplacement et de la droite joignant (x_0, y_0) à (x, y), et θ_2 l'angle du vecteur déplacement et de la direction de propagation de la lumière qui tombe en (x_0, y_0). Par suite de cette modulation sinusoïdale de phase, le spectre de fréquence $\mathbf{F}(\nu)$ de l'amplitude complexe, fonction du temps, de la vibration qui tombe au point (x, y), peut être développé de façon classique selon une somme de fonctions de Bessel, comme toute

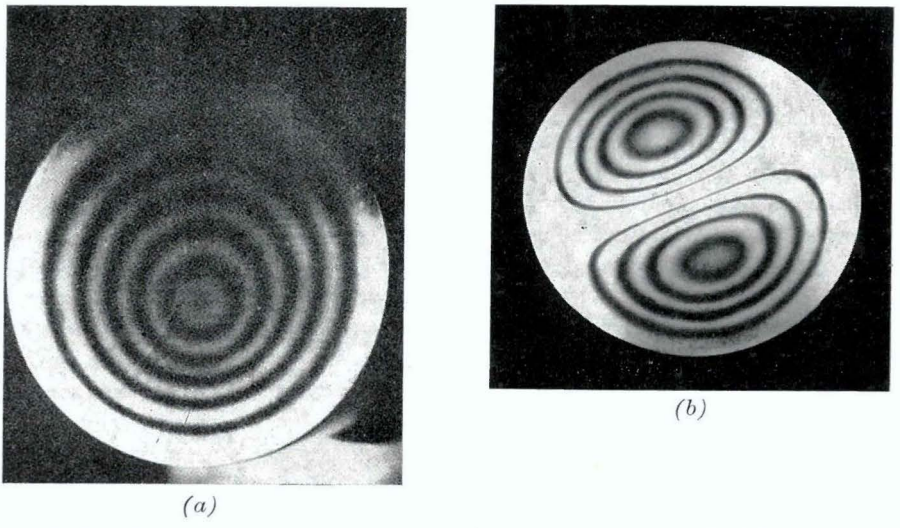
onde dont la phase est modulée sinusoïdalement:

$$\mathbf{F}(\nu) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\cos\theta_1+\cos\theta_2)\, m(x_0, y_0)\right] \delta\left(\nu-\frac{k\Omega}{2\pi}\right) \qquad (8\text{-}104)$$

Lorsque le temps de pose est beaucoup plus grand que la période des vibrations, soit $T \gg 2\pi/\Omega$, seul le terme de rang $k = 0$ correspondant à l'onde «porteuse» tombe à l'intérieur de la bande passante de la fonction de transfert (8-92). En outre si les variations du taux de modulation introduites par le terme $\cos\theta_1$ sont sensiblement indépendantes de (x, y), c'est-à-dire si l'angle sous lequel on voit le film depuis le point de coordonnées (x_0, y_0) est faible, l'amplitude de l'image reconstruite, se réduit au facteur:

$$J_0\left[\frac{2\pi}{\lambda}(\cos\theta_1+\cos\theta_2)\, m(x_0, y_0)\right] \qquad (8\text{-}105)$$

et l'intensité en ce point de l'image se réduit au carré de ce facteur. Ainsi l'intensité de l'image reconstruite dépend, en chaque point, de la valeur de l'amplitude $m(x_0, y_0)$ de la vibration au point correspondant de l'objet.



(a) *(b)*

FIG. 8-35. — *Images holographiques d'un diaphragme vibrant sur deux modes différents. (Avec l'autorisation de R. L. Powell et K. A. Stetson).*

La figure 8-35 montre des photographies d'un diaphragme en vibration obtenues par Powell et Stetson. La photographie de la figure 8-35*a* représente le diaphragme vibrant sur son mode fondamental, avec un seul maximum de vibration au centre. Sur la photographie de la figure 8-35*b* le diaphragme vibre sur un mode plus élevé, avec deux maxima de vibration. En comptant le nombre de franges à partir du bord du diaphragme jusqu'en un point donné, il est possible, à l'aide de la relation (8-105) de déterminer l'amplitude de la vibration en ce point.

Images tridimensionnelles à haute résolution. — Comme nous l'avons mentionné précédemment dans le paragraphe relatif à la microscopie, l'une des propriétés les plus intéressantes des images holographiques est leur énorme profondeur de champ. En utilisant un système classique de formation d'images, par exemple un microscope conçu pour fournir un pouvoir de résolution latéral élevé, on ne peut, pour des raisons vraiment fondamentales, mettre «au point» qu'un volume très limité de l'espace objet. Bien sûr, il est possible d'explorer un volume étendu *en plusieurs fois*, en modifiant la mise au point de manière à explorer les différentes régions de l'espace objet, mais souvent une telle méthode ne convient pas, par exemple si l'objet évolue ou s'il est en mouvement.

On peut résoudre ce problème en enregistrant un hologramme de l'objet à l'aide d'un laser à impulsions, afin d'obtenir des temps de pose courts. L'objet qui évolue est ainsi «gelé» dans le temps, mais l'enregistrement conserve toute l'information nécessaire à l'exploration du volume entier de l'objet. Il suffit d'éclairer l'hologramme pour explorer l'image réelle ou virtuelle à l'aide d'un système optique auxiliaire. L'observation séquentielle de l'image tridimensionelle est maintenant possible car l'objet, ou plutôt son image holographique, n'évolue plus.

Cette méthode a été appliquée avec succès par C. Knox à la microscopie tridimensionnelle de spécimens biologiques vivants (réf. 8-43) et par Thompson, Ward et Zinky à la mesure de la séparation des particules en fonction de leur taille dans les aérosols (réf. 8-44). Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter ces références.

Tracé de lignes de niveau sur les objets tridimensionnels. — L'interférence d'images cohérentes multiples, telle que nous l'avons déjà décrite, a conduit également au développement de techniques permettant d'obtenir des images tridimensionnelles sur lesquelles se superposent des lignes de niveau. Ces techniques sont applicables à des problèmes de tracé de coupes d'un objet et de relevé de courbes de niveau. Deux techniques nettement différentes ont été proposées par Hildebrand et Haines (réf. 8-45). Dans la première, l'objet est éclairé par deux points sources distincts, mutuellement cohérents. On peut éclairer l'objet avec les deux points sources simultanément et enregistrer l'hologramme en une exposition unique; on peut aussi enregistrer l'hologramme grâce à deux expositions successives en n'utilisant qu'un seul point source dont la position varie d'une pose à l'autre.

Considérons le diagramme d'interférences donné par les deux sources éclairant l'objet: on constate qu'il se compose de franges d'interférences brillantes et sombres qui dessinent les hyperboles de différence de marche constante, comme le montre la figure 8-36. Si on éclaire l'objet latéralement et si on enregistre l'hologramme face à l'objet, les courbes de niveau apparaissent alors sur l'image reconstruite. On obtient des résultats identiques en utilisant les deux sources simultanément au cours d'une pose unique, où en les utilisant individuellement pour une double exposition, car dans les deux cas il y a addition cohérente des deux images.

La méthode de tracé des courbes de niveau par utilisation de deux sources présente l'inconvénient suivant: les directions d'éclairage et d'observation doivent faire un angle voisin de 90°, si bien que dans le cas d'un objet possédant un relief important, des ombres se projettent et certaines parties de l'objet ne sont pas éclairées du tout. Cette lacune est comblée par la méthode de tracé des courbes de niveau à l'aide de

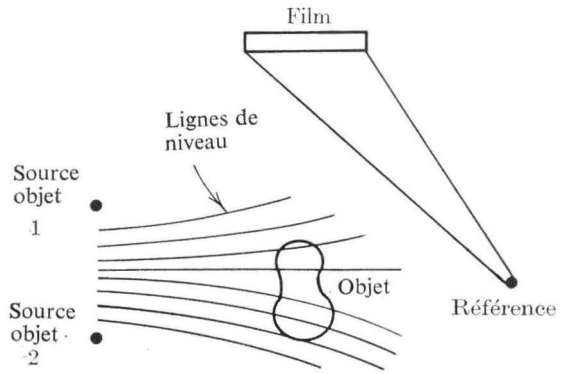


FIG. 8-36. — *Obtention de lignes de niveau par la méthode des deux sources.*

deux longueurs d'onde. Dans ce cas, le faisceau éclairant l'objet et le faisceau de référence contiennent chacun deux composantes monochromatiques. Quand on éclaire l'hologramme ainsi réalisé par une lumière ne contenant qu'une seule fréquence, il apparaît deux images ayant une position et un grandissement légèrement différents. Ces deux images vont interférer et, dans certains cas, les lignes de niveau de l'image résultante donneront des indications précises sur le relief de l'objet. Nous n'insistons pas sur l'étude détaillée de ce cas qui est plus compliqué; le lecteur intéressé pourra consulter l'article original pour obtenir plus de détails (réf. 8-45). La figure (8-37) illustre les résultats du tracé des courbes de niveau par la méthode des deux longueurs d'onde. Dans la partie (*a*) nous voyons une image holographique d'une pièce de monnaie, éclairée de manière habituelle par de la lumière monochromatique. Lorsqu'on utilise une lumière composée de deux longueurs d'onde pour enregistrer l'hologramme, on obtient l'image de la figure (8-37*b*). Les deux longueurs d'onde ont été obtenues ici grâce à deux raies émises par un laser à argon. Ces deux raies laser sont distantes de 65 Å et les lignes de niveau produites sur l'image sont espacées de 0,02 mm.

Formation d'images à travers un milieu introduisant des aberrations. — Dans bien des cas présentant un intérêt pratique, on est amené à former des images à l'aide d'un système optique en présence d'aberrations. Ces aberrations peuvent provenir des imperfections des éléments mêmes utilisés pour former l'image, ou peuvent être introduites par un milieu extérieur tel que l'atmosphère. Les techniques de l'holographie offrent plusieurs avantages spécifiques pour résoudre les problèmes de formation d'images en présence de telles aberrations. Nous allons présenter ici trois techniques holographiques nettement différentes qui permettent d'obtenir une résolution élevée en présence d'aberrations importantes.

La première technique (réf. 8-46 et 8-47) est applicable lorsque le milieu produisant des aberrations est invariable dans le temps, mais mobile dans l'espace. Comme le montre la figure (8-38) on enregistre un hologramme de l'onde objet aberrante en présence d'une référence non aberrante. Si l'hologramme est éclairé de manière à former une image réelle de l'objet, il se forme également une image réelle du milieu aberrant entre l'hologramme et le plan de l'image. Représentons par $\mathbf{U}_0(\xi, \eta)$ l'onde objet qui tombe sur le milieu perturbateur et la transmittance en amplitude de ce milieu par $\exp[jW(\xi, \eta)]$; l'onde formant l'image réelle du milieu produisant les

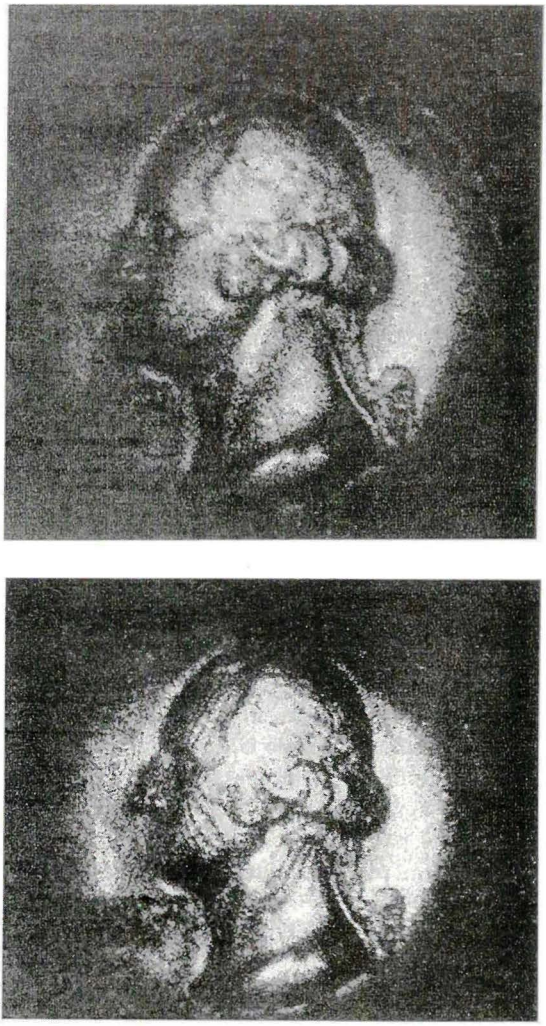


FIG. 8-37. — *Obtention des lignes de niveau par la méthode des deux longueurs d'onde. (Avec l'autorisation de B. P. Hildebrand et K. A. Haines).*

aberrations est l'onde conjuguée $\mathbf{U}^*(\xi, \eta) \exp [-jW(\xi, \eta)]$. Remarquons à présent que si, lors de la reconstruction, on dispose le milieu perturbateur original de telle sorte qu'il coïncide exactement avec son image réelle, l'onde transmise par ce milieu devient:

$$\mathbf{U}_0^*(\xi, \eta) \exp [-jW(\xi, \eta)] \exp [jW(\xi, \eta)] = \mathbf{U}_0^*(\xi, \eta)$$

Les aberrations ont ainsi été exactement compensées et il se forme une image dépourvue d'aberration[1].

[1] La précision avec laquelle le milieu aberrant doit être positionné lors de la reconstruction doit être évidemment très grande. Pour former une image à travers un verre diffusant très fin, on ne peut pas tolérer d'erreur supérieure à quelques microns.

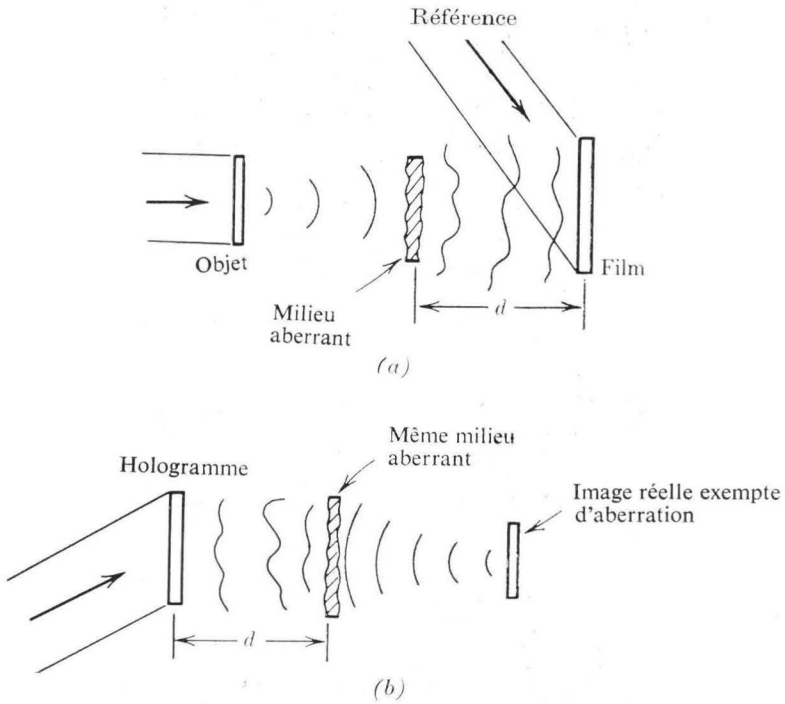


FIG. 8-38. — *Utilisation du milieu aberrant original pour compenser des aberrations: a) enregistrement de l'hologramme, b) reconstruction de l'image.*

Cette technique pourrait sans aucun doute trouver une application en cryptographie pour coder des messages de façon sûre. Le message à coder sert d'objet. On place un diffuseur entre l'objet et le plan du film. En éclairant l'hologramme de façon habituelle on obtient une image beaucoup trop déformée pour pouvon être lue. Cependant, la personne qui possède le *même* diffuseur que celui qui a été utilisé pendant l'enregistrement peut, en disposant convenablement cette «plaque de décodage», obtenir une image exempte d'aberration.

La figure 8-39 schématise une seconde technique intéressante. Dans ce cas le milieu produisant les aberrations peut être fixe dans l'espace (c'est-à-dire *immobile*) mais doit être invariable dans le temps (ou tout au plus très lentement variable). Pour obtenir des images à haute résolution en présence d'aberrations, on enregistre un hologramme des ondes aberrantes produites par un objet constitué par un point source, en utilisant une onde de référence non aberrante. Cet hologramme peut alors être utilisé comme «plaque de compensation» pour rendre un système optique classique capable de former une image exempte d'aberration. Représentons les ondes tombant sur le film photographique et provenant du point source unique par $\exp [jW(x, y)]$. Nous supposons ici que le milieu aberrant est suffisament rapproché du film pour que les variations d'intensité soient négligeables. Le terme de la transmittance de l'hologramme qui contribue normalement à la formation de l'image réelle est proportionnel à $\exp [-jW(x, y)]$. De ce fait, si nous remplaçons le point

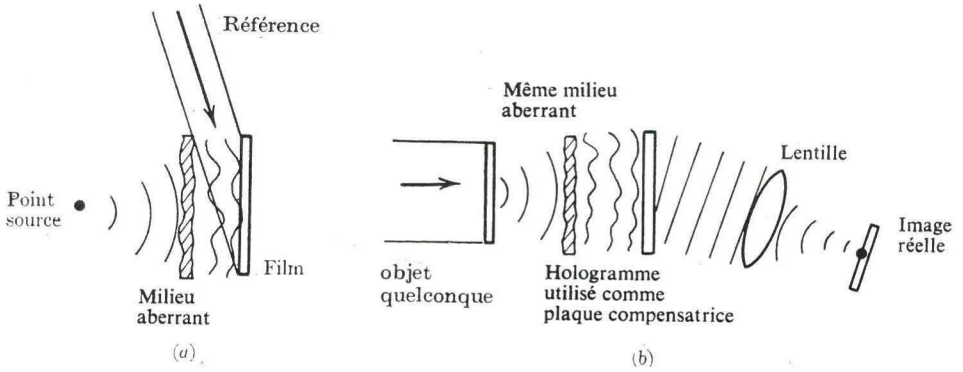


FIG. 8-39. — *Utilisation d'un hologramme comme plaque compensatrice. a) Enregistrement de la plaque compensatrice; b) Compensation des aberrations.*

source par un objet plus compliqué et si nous plaçons l'hologramme dans la même position que celle où il a été enregistré précédemment, nous trouvons que la courbure des ondes objet atteignant l'hologramme est compensée à la traversée de l'hologramme; les ondes provenant des différents points objet produisent des ondes planes qui se propagent dans des directions différentes. La lentille forme alors une image non aberrante de l'objet.

Cette technique ne convient qu'à l'intérieur d'un champ angulaire limité, car si un point objet est trop éloigné de la position du point source utilisé pour enregistrer l'hologramme, les aberrations relatives à cette onde peuvent être différentes des aberrations enregistrées sur l'hologramme. Cette condition est moins restrictive lorsque l'hologramme est enregistré très près du milieu aberrant. Upatnieks et ses collaborateurs (réf. 8-48) ont appliqué cette technique avec succès à la compensation des aberrations d'une lentille; cette méthode est particulièrement bien adaptée à ce cas.

Une troisième technique qui peut être appliquée à la formation d'images à travers des milieux mobiles ou immobiles, variables dans le temps ou invariables consiste à faire traverser le même milieu aberrant *à la fois* par l'onde de référence et par l'onde objet. Comme l'indique la figure 8-40, on utilise la disposition d'enregistrement par *transformation de Fourier sans lentille*. Pour simplifier, supposons que le milieu aberrant soit situé juste en avant du plan d'enregistrement. L'onde de référence et l'onde objet tombant sur le film peuvent ainsi s'écrire:

$$\mathbf{A}(x, y) \exp [jW(x, y)] \quad \text{et} \quad \mathbf{a}(x, y) \exp [jW(x, y)]$$

L'interférence de ces deux ondes aberrantes donne une figure d'interférence qui n'est pas affectée par la présence du milieu aberrant:

$$\begin{aligned} \mathcal{I}(x, y) &= |\mathbf{A}(x, y) \exp [jW(x, y)] + \mathbf{a}(x, y) \exp [jW(x, y)]|^2 \\ &= |\mathbf{A}|^2 + |\mathbf{a}|^2 + \mathbf{A}^*\mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{a}^* \end{aligned}$$

L'hologramme n'est donc pas affecté par la présence du milieu aberrant.

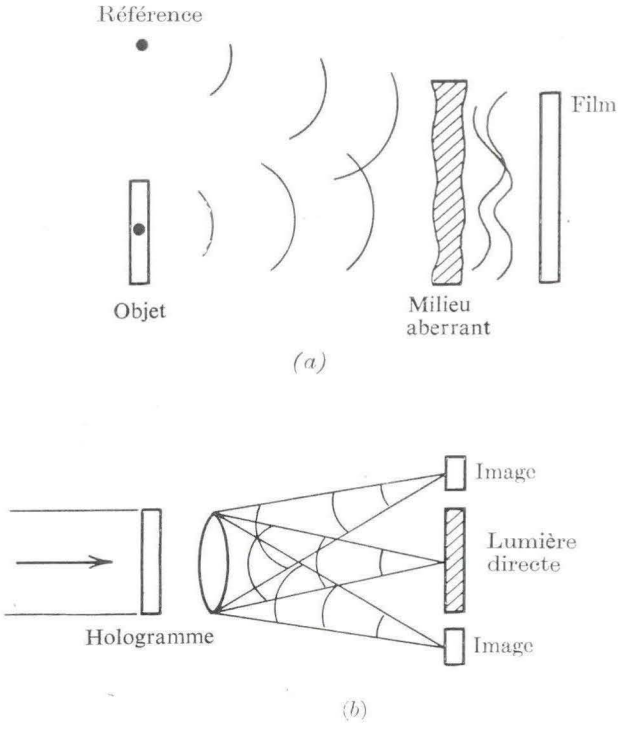


FIG. 8-40. — *Formation d'images non aberrantes lorsque l'onde de référence et l'onde objet subissent l'effet des mêmes aberrations: (a) enregistrement de l'hologramme; (b) obtention de l'image.*

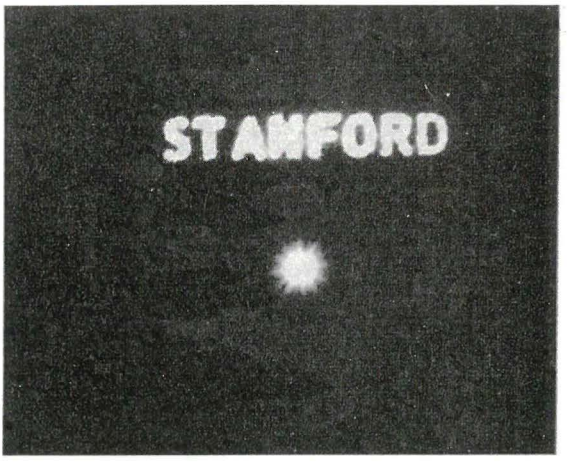


FIG. 8.41. — *L'objet et l'onde de référence.*

Ici encore, cette technique ne convient que pour un champ objet limité, puisque des points trop éloignés de la référence peuvent produire des ondes dont les aberrations diffèrent de celle de l'onde de référence[1]. Le champ objet est d'autant plus étendu que les aberrations sont introduites plus près du plan d'enregistrement. Pour obtenir plus de détails concernant ce procédé, le lecteur peut consulter la référence 8-49.

Les figures 8-41, 8-42, 8-43 et 8-44 montrent les résultats expérimentaux obtenus grâce à cette technique. L'objet est ici un cliché contenant à la fois le mot «Stanford» et un point de référence brillant, comme le montre la figure 8-41. Le milieu aberrant

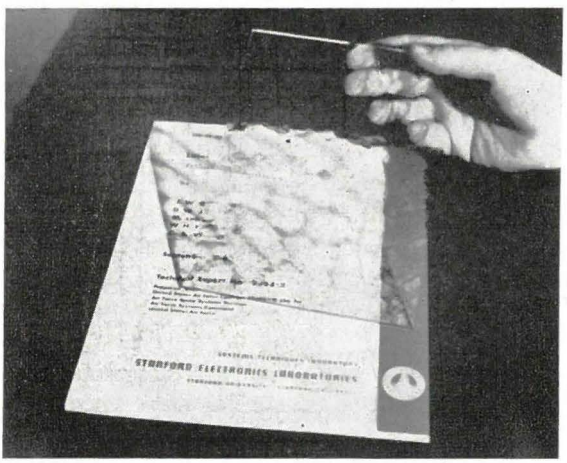


FIG. 8-42. — *Le milieu aberrant.*

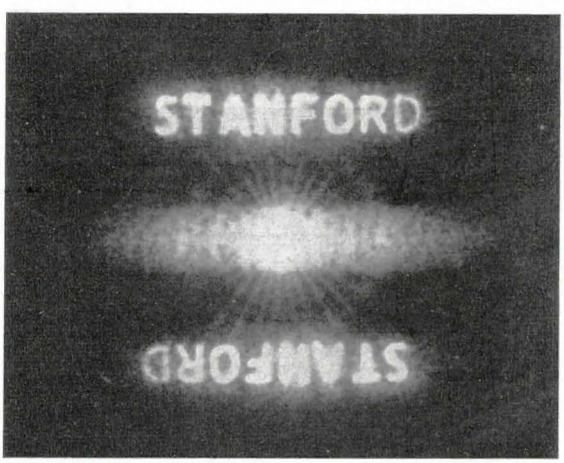


FIG. 8-43. — *Images formées par reconstruction d'ondes en présence du milieu aberrant.*

[1] De façon plus précise, un point donné de l'objet ne donnera une image exempte d'aberration que si les rayons issus de ce point et les rayons issus de la référence subissent des différences de marche identiques quel que soit le point du film où aboutissent ces rayons.

est un verre martelé ordinaire comme l'indique la figure 8-42. La figure 8-43 présente les images obtenues par reconstruction d'ondes en présence du milieu aberrant. A titre de comparaison, la figure 8-44 montre l'image formée de façon classique, obtenue en remplaçant le film par une lentille convergente qui forme directement l'image en présence du milieu aberrant. L'image formée dans ce cas a totalement disparu du fait des aberrations. Les images obtenues par reconstruction d'ondes n'ont, pour leur part, subi que des dégradations mineures.

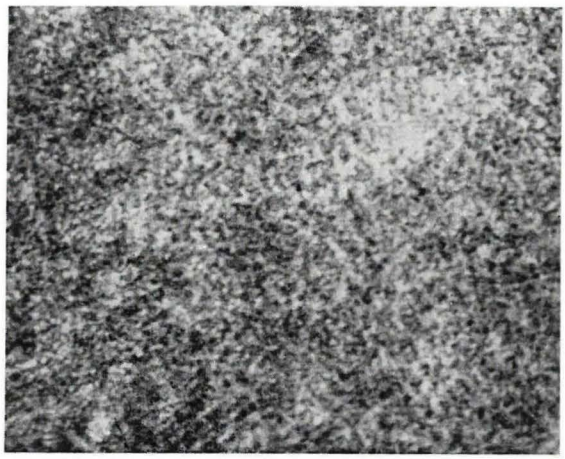


FIG. 8-44. — *Images formées par une lentille en présence du milieu aberrant.*

PROBLÈMES

8-1. Montrer que l'hologramme d'un objet plan enregistré dans un plan parallèle à l'objet, donne des images qui se forment dans des plans parallèles à l'hologramme.[1] (On supposera, pour simplifier, que l'onde de référence est plane).

8-2. On enregistre un hologramme avec la lumière de longueur d'onde 4880 Å provenant d'un laser à argon et on restitue les images avec la lumière de longueur d'onde 6328 Å fournie par un laser à hélium-néon.

a) En supposant que $z_p = \infty$, $z_r = \infty$ et $z_0 = 10$ cm, calculer la distance z_i.

b) En supposant $z_p = \infty$, $z_r = 2z_0$ et $z_0 = 10$ cm, calculer z_i et le grandissement M.

8-3. Montrer que, si $\lambda_2 = \lambda_1$ et $z_p = z_r$, on obtient une image virtuelle avec un grandissement unité, tandis que, si $\lambda_2 = \lambda_1$ et $z_p = -z_r$, on obtient une image réelle avec un grandissement unité.

8-4. On enregistre un hologramme suivant le schéma de la figure 8-10. Le cliché photographique est agrandi m fois. Montrer que les images formées à partir de cet hologramme agrandi se forment à des distances z_i données par:

$$z_i = \left[\frac{1}{z_p} \mp \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_r m^2} \pm \frac{\lambda_2}{\lambda_1 z_0 m^2}\right]^{-1}$$

et subissent le grandissement:

$$M = \left|\frac{\lambda_2 z_i}{m\lambda_1 z_0}\right|$$

[1] Voir la note au las de la page 189.

λ_1 et λ_2 étant respectivement les longueurs d'onde utilisées à l'enregistrement et à la reconstruction.

8-5. Le tableau suivant donne les fréquences de coupure approximatives des fonctions de transfert de modulation de plusieurs types de film:

Kodak Tri X	50 traits/mm
Kodak High-Contrast Copy	60 traits/mm
Kodak SO 243	300 traits/mm
Agfa Agepan FF	600 traits/mm

On suppose qu'on utilise la longueur d'onde 6328 Å et un montage par transformation de Fourier sans lentille, l'objet et la référence étant placés à 10 cm du film. Pour chacun des films précédents, calculer le rayon du cercle (centré au point de référence) à l'extérieur duquel les points de l'objet ne pourront donner de point image correspondant, lors de la reconstruction.

8-6. Un film a une caractéristique (t-E) non-linéaire qui, dans la région où l'on opère, est de la forme:

$$t = t_b + \beta E_1^3$$

où E_1 représente les variations de lumination par rapport à la lumination due à l'onde de référence.

a) En supposant que l'onde de référence et l'onde objet ont respectivement pour expression, dans le plan du film:

$$A \exp(-j2\pi\alpha y) \quad \text{et} \quad a(x, y) \exp[-j\phi(x, y)]$$

trouver une expression des termes de la transmittance qui produisent les deux images du premier ordre.

b) A quoi cette expression se réduit-elle si $A \gg a$?

c) Comparer les modulations de phase et d'amplitude obtenues aux questions (*a*) et (*b*) aux modulations idéales de phase et d'amplitude produites par un film dont la caractéristique (t-E) est linéaire.

8-7. Une onde de référence intense $A \exp(-j2\pi\alpha y)$ et une onde objet faible $a(x, y) \exp[-j\phi(x, y)]$ interfèrent sur un film idéal dont la caractéristique (t-E) est celle de la figure (8-22). On réalise par contact une copie parfaite de cet hologramme; on dispose donc de deux hologrammes identiques.

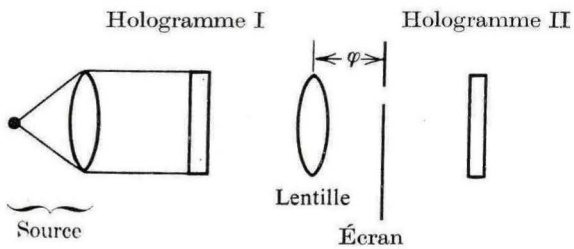


FIG. P 8.7.

L'un des hologrammes est éclairé par de la lumière cohérente, et un système optique forme l'image de cet hologramme sur le second hologramme identique, comme le montre la figure P 8-7. On place un écran percé d'un trou dans le plan focal image de la lentille, de telle sorte que la seule composante de la lumière transmise dans le plan de l'image soit celle qui provient de l'un des deux termes du premier ordre de la transmittance de l'hologramme I. Montrer, en supposant $a \ll A$, que l'une des composantes de la lumière transmise par l'hologramme II possède une modulation d'amplitude $a(x, y)$ et une modulation de phase $\phi(x, y)$ qui ne présentent pas de distorsion, bien le film utilisé ait une caractéristique rectangulaire.

8.8. On utilise le montage par transformation de Fourier sans lentille de la figure 8-18 pour enregistrer un hologramme d'un objet constitué par un cliché carré de côté L. La transmittance en amplitude de l'objet est $t_0(x_0, y_0)$ et la distance de l'objet au film est z. Les images sont obtenues grâce à une lentille convergente de distance focale φ, comme l'indique la figure 8-19.

a) Calculer le grandissement M des deux images du premier ordre.

b) Montrer que l'amplitude du terme d'ordre zéro (c'est-à-dire la lumière qui tombe entre les deux images du premier ordre) est proportionnelle à la fonction d'autocorrélation de:

$$t_0\left(\frac{x_0}{M}, \frac{y_0}{M}\right) \exp\left[j \frac{\pi}{\lambda z M^2}(x_0^2+y_0^2)\right]$$

augmentée du spot central de diffraction.

c) A quelle distance du centre du cliché objet doit-on placer le point source de référence pour que la lumière correspondant à l'ordre zéro n'empiète pas sur les deux images du premier ordre?

8.9. On se propose d'enregistrer un hologramme avec des rayons X en utilisant une radiation de longueur d'onde 1 Å (1 Å = 10^{-10} m), et de reconstruire les images par voie optique en utilisant de la lumière de longueur d'onde 6000 Å. On choisit la méthode par transformation de Fourier sans lentille comme le montre la figure P 8-9*a*. La largeur de l'objet est 0,1 mm et on choisit la distance minimale entre l'objet et la référence égale à 0,1 mm pour être sûr que les images jumelles soient séparées du terme central d'interférence. Le film sensible aux rayons X est placé à 2 cm de l'objet.

a) Quelle est la fréquence spatiale maximale (en période/mm) de la répartition d'intensité dans le plan du film?

b) On suppose que le pouvoir de résolution du film est suffisant pour enregistrer toutes les variations d'intensité du rayonnement incident. On se propose de reconstruire les images à la manière habituelle, représentée par la figure P 8-9*b*.

Pourquoi cette expérience sera-t-elle un échec?

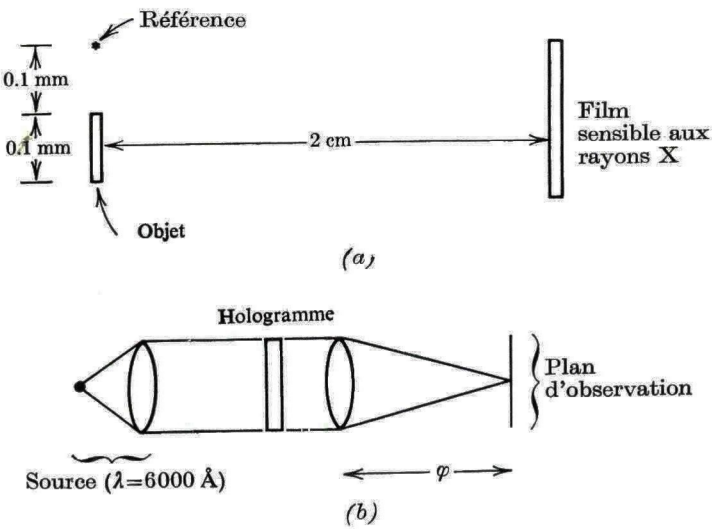


FIG. P 8-9.

RÉFÉRENCES

8-1 Gabor, D.: A New Microscope Principle, *Nature*, **161**:777 (1948).
8-2 Bragg, W. L.: The X-ray Microscope, *Nature*, **149**:470 (1942).
8-3 Gabor, D.: Microscopy by Reconstructed Wavefronts, *Proc. Roy. Soc.*, **A197**:454 (1949).
8-4 Gabor, D.: Microscopy by Reconstructed Wavefronts: II, *Proc. Phys. Soc.*, **B64**:449 (1951).
8-5 Rogers, G. L.: Gabor Diffraction Microscopy: The Hologram as a Generalized Zone Plate, *Nature*, **166**:237 (1950).
8-6 El-Sum, H. M. A.: «Reconstructed Wavefront Microscopy,» doctoral dissertation, Stanford University, 1952. (Available from University Microfilm, Inc., Ann. Arbor, Mich.)
8-7 Lohmann, A.: Optical Single-Sideband Transmission Applied to the Gabor Microscope, *Opt. Acta*, **3**:97 (1956).
8-8 Leith, E. N., and J. Upatnieks: Reconstructed Wavefronts and Communication Theory, *J. Opt. Soc. Am.*, **52**:1123 (1962).
8-9 Leith, E. N., and J. Upatnieks: Wavefront Reconstruction with Diffused Illumination and Three-dimensional Objects, *J. Opt. Soc. Am.*, **54**:1295 (1964).
8-10 Collier, R. J.: Some Current Views on Holography, *IEEE Spectrum*, **7**:67 (1966).
8-11 Gabor, D., and W. P. Goss: Interference Microscope with Total Wavefront Reconstruction, *J. Opt. Soc. Am.*, **56**:849 (1966).
8-12 Leith, E. N., and J. Upatnieks: Wavefront Reconstruction with Continuoustone Objects, *J. Opt. Soc. Am.*, **53**:1377 (1963).
8-13 Leith, E. N., J. Upatnieks, and K. A. Haines: Microscopy by Wavefront Reconstruction, *J. Opt. Soc. Am.*, **55**:981 (1965).
8-14 Meier, R. W.: Magnification and Third-order Aberrations: in Holography, *J. Opt. Soc. Am.*, **55**:987 (1965).
8-15 van Ligten, R. F.: Influence of Photographic Film on Wavefront Reconstruction. I: Plane Wavefronts, *J. Opt. Soc. Am.*, **56**:1 (1966).
8-16 van Ligten, R. F.: Influence of Photographic Film on Wavefront Reconstruction. II: «Cylindrical» Wavefronts, *J. Opt. Soc. Am.*, **56**:1009 (1966).
8-17 Stroke, G. W.: *An Introduction to Coherent Optics and Holography*, p. 116, Academic Press, New York, 1966.
8-18 Goodman, J. W.: Film-grain Noise in Wavefront-Reconstruction Imaging, *J. Opt. Soc. Am.*, **57**:493 (1967).
8-19 Kozma, A.: Photographic Recording of Spatially Modulated Coherent Light, *J. Opt. Soc. Am.*, **56**:428 (1966)
8-20 Davenport, W. B., Jr., and W. L. Root: *Random Signals and Noise*, chaps. 12 and 13, McGraw-Hill Book Company, New York, 1958.
8-21 Middleton, D.: *Statistical Communication Theory*, chap. 5, McGraw-Hill Book Company, New York, 1960.
8-22 Magnus, W., and F. Oberhettinger: *Formulas and Theorems for the Functions of Mathematical Physics*, p. 18, Chelsea Publishing Company, New York, 1954.
8-23 Davenport, W. B., Jr: Signal-to-Noise Rations in Bandpass Limiters, *J. Appl. Phys.*, **24**:720 (1953).
8-24 Fiesem, A. A., and J. S. Zelenka: Effects of Film Nonlinearities in Holography, *Appl. Opt.*, **6**:1755 (1967).
8-25 Goodman, J. W.: Effects of Film Nonlinearities on Wavefront-Reconstruction Images of Diffuse Objects, *J. Opt. Soc. Am.*, **57**:560 (1967).
8-26 Knight, G.: «Effects of Film Non-linearities in Holography,» doctoral dissertation, Stanford University, 1967.
8-27 Goodman, J. W.: Temporal Filtering Properties of Holograms, *Appl. Optics*, **6**:857 (1967).
8-28 Papoulis, A.: *The Fourier Integral and Its Applications*, p. 27, McGraw-Hill Book Company, New York, 1963.
8-29 Mertz, L., and N. O. Young: «Fresnel Transformations of Images,» in K. J. Habell (ed.), *Proc. Conf. Optical Instruments and Techniques*, p. 305, John Wiley & Sons, New York, 1963.
8-30 Lohmann, A. W.: Wavefront Reconstruction for Incoherent Objects, *J. Opt. Soc. Am.* **55**:1555 (1965)

8-31 Stroke, G. W., and R. C. Restrick III: Holography with Spatially Noncoherent Light, *Appl. Phys. Lett.*, **7**:229 (1965).
8-32 Cochran, G.: New Method of Making Fresnel Transforms with Incoherent Light, *J. Opt. Soc. Am.*, **56**:1513 (1966).
8-33 Lippmann, G.: *J. Physique*, **3**:97 (1894).
8-34 Denisyuk, Y. N.: *Soviet Phys.-Dokl.*, **7**:543 (1962).
8-35 Stroke, G. W., and A. E. Labeyrie: White-light Reconstruction of Holographic Images Using the Lippmann-Bragg Diffraction Effect, *Phys. Lett.*, **20**:368 (1966).
8-36 Lin, L. H., et al: Multicolor Holographic Image Reconstruction with White-Light Illumination, *Bell System Tech. J.*, **45**:659 (1966).
8-37 Leith, E. N., et al.: Holographic Data Storage in Three-dimensional Media, *Appl. Opt.*, **5**:1303 (1966).
8-38 Tyler, G. L.: The Bistatic, Continuous-wave Radar Method for the Study of Planetary Surfaces, *J. Geophys. Res.*, **71**:1559 (1966).
8-39 Kreuzer, J. L.: Ultrasonic Three Dimensional Imaging Using Holographic Techniques, *Proc. Symp. Modern Optics*, Polytechnic Press, New York 91 (1967).
8-40 Gabor, D., et al.: Optical Image Synthesis (Complex Amplitude Addition and Subtraction) by Holographic Fourier Transformation, *Phys. Lett.*, **18**:116 (1965).
8-41 Brooks, R. E., L. O. Heflinger, and R. F. Wuerker: Pulsed Laser Holograms, *IEEE J. Quantum Electron.*, *QE*-**2**-275 (1966).
8-42 Powell, R. L., and K. A. Stetson: Interferometric Vibration Analysis by Wavefront Reconstruction, *J. Opt. Soc. Am.*, **55**:1593 (1965).
8-43 Knox, C.: Holographic Microscopy as a Technique for Recording Dynamic Microscopic Subjects, *Science*, **153**:989 (1966).
8-44 Thompson, B. J., J. H. Ward, and W. R. Zinky: Application of Hologram Techniques for Particle Size Analysis, *Appl. Opt.*, **6**:519 (1967).
8-45 Hildebrand, B. P., and K. A. Haines: Multiple-wavelength and Multiplesource Holography Applied to Contour Generation, *J. Opt. Soc. Am.*, **57**:155 (1967).
8-46 Leith, E. N., and J. Upatnieks: Holographic Imagery through Diffusing Media, *J. Opt. Soc. Am.*, **56**:523 (1966).
8-47 Kogelnik, H.: Holographic Image Projection through Inhomogeneous Media, *Bell System Tech. J.*, **44**:2451 (1965).
8-48 Upatnieks, J., A. Vander Lugt, and E. Leith: Correction of Lens Aberrations by Means of Holograms, *Appl. Opt.*, **5**:589 (1966).
8-49 Goodman, J. W., et al.: Wavefront-Reconstruction Imaging through Random Media. *Appl. Phys. Lett.*, **8**:311 (1966).

APPENDICE

A. — LES FONCTIONS DELTA DE DIRAC

La fonction delta de Dirac à une dimension, largement utilisée dans l'étude des circuits électriques, peut être définie comme la limite d'une suite d'impulsions $f(t)$ de largeur décroissante, de hauteur croissante, de telle sorte que $\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt$ reste égale à l'unité. On peut, évidemment, utiliser un grand nombre de formes d'impulsions différentes pour la définir; les trois définitions suivantes sont également acceptables:

$$\delta(t) = \lim_{N\to\infty} N \exp(-N^2\pi t^2) \tag{A-1a}$$

$$\delta(t) = \lim_{N\to\infty} N \operatorname{rect}(Nt) \tag{A-1b}$$

$$\delta(t) = \lim_{N\to\infty} N \operatorname{sinc}(Nt) \tag{A-1c}$$

Alors que la fonction δ est utilisée dans l'étude des circuits pour représenter une impulsion de courant ou de tension très brève cet très intense, le concept correspondant en optique est un point source de lumière c'est-à-dire une impulsion *spatiale* $f(x, y)$ telle que $\int_{-\infty}^{\infty}\int f(x, y)\,dx\,dy = 1$. La définition d'une fonction δ dans l'espace à deux dimensions est simplement une extension du cas de l'espace unidimensionnel, bien qu'il y ait une latitude encore plus grande dans le choix des fonctions utilisées pour représenter ces impulsions. Parmi les définitions possibles de la fonction δ bidimensionnelle citons:

$$\delta(x, y) = \lim_{N\to\infty} N^2 \exp[-N^2\pi(x^2+y^2)] \tag{A-2a}$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N\to\infty} N^2 \operatorname{rect}(Nx) \operatorname{rect}(Ny) \tag{A-2b}$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N\to\infty} N^2 \operatorname{sinc}(Nx) \operatorname{sinc}(Ny) \tag{A-2c}$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N\to\infty} \frac{N^2}{\pi} \operatorname{circ}\left(N\sqrt{x^2+y^2}\right) \tag{A-2d}$$

$$\delta(x, y) = \lim_{N\to\infty} N \frac{J_1\left(2\pi N\sqrt{x^2+y^2}\right)}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{A-2e}$$

Les expressions (A-2*a*), (A-2*b*) et (A-2*c*) sont à variables séparables en coordonnées rectangulaires, tandis que les expressions (A-2*d*) et (A-2*e*) présentent la symétrie circulaire. Dans certaines applications l'une des définitions peut mieux convenir que les autres; on choisit alors la définition la plus appropriée au problème donné.

Chacune des définitions précédentes de la fonction δ à deux dimensions possède les propriétés fondamentales suivantes:

$$\delta(x, y) = \begin{cases} \infty & \text{pour } x = y = 0 \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{A-3}$$

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\int \delta(x, y)\, dx\, dy = 1 \quad \text{quel que soit } \varepsilon > 0 \tag{A-4}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(\xi, \eta)\, \delta(x-\xi, y-\eta)\, d\xi\, d\eta = \mathbf{g}(x, y) \tag{A-5}$$

en chaque point où $\mathbf{g}$ est continue[1].

Une autre propriété très importante, qui peut être démontrée à partir de l'une quelconque des définitions précédentes (cf. Pb. 2-70) s'exprime par:

$$\delta(ax, by) = \frac{1}{|ab|}\, \delta(x, y) \tag{A-6}$$

Il n'y a, bien sûr, aucune raison qui empêche de définir des fonctions δ dans un espace à plus de deux dimensions; les propriétés de telles fonctions sont tout à fait analogues à celles des fonctions définies dans les espaces de dimension moins élevée.

B. — DÉMONSTRATION DES THÉORÈMES RELATIFS A LA TRANSFORMATION DE FOURIER

Dans ce paragraphe, nous donnons des démonstrations abrégées des théorèmes fondamentaux relatifs à la transformation de Fourier. Pour des démonstrations plus rigoureuses le lecteur peut consulter les références (2-1) ou (2-2).

*1. — **Théorème relatif à la linéarité.*** — $\mathcal{F}\{\alpha\mathbf{g}+\beta\mathbf{h}\} = \alpha\mathcal{F}\{\mathbf{g}\}+\beta\mathcal{F}\{\mathbf{h}\}$. — Ce théorème découle directement des propriétés de linéarité des intégrales de définition de la transformée de Fourier.

*2. — **Théorème relatif à la similitude.*** — Si $\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x, y)\} = \mathbf{G}(f_X, f_Y)$, on a:

$$\mathcal{F}\{\mathbf{g}(ax, by)\} = \frac{1}{|ab|}\, \mathbf{G}\left(\frac{f_X}{a}, \frac{f_Y}{b}\right)$$

---

[1] Cette dernière propriété est appelée en langue anglaise «*sifting property*». Dans les ouvrages de langue française on dit que δ est «l'unité de convolution» (N.d.T.).

Démonstration:

$$\mathcal{F}\{\mathbf{g}(ax, by)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(ax, by) \exp\left[-j2\pi(f_X x + f_Y y)\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(ax, by) \exp\left[-j2\pi\left(\frac{f_X}{a} ax + \frac{f_X}{b} by\right)\right] \frac{\mathrm{d}ax}{|a|} \frac{\mathrm{d}by}{|b|}$$

$$= \frac{1}{|ab|} \mathbf{G}\left(\frac{f_X}{a}, \frac{f_Y}{b}\right)$$

*3. — **Théorème relatif à la translation.*** — Si $\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x, y)\} = \mathbf{G}(f_X, f_Y)$, on a:

$$\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x-a, y-b)\} = \mathbf{G}(f_X, f_Y) \exp\left[-j2\pi(f_X a + f_Y b)\right]$$

Démonstration:

$$\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x-a, y-b)\} = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(x-a, y-b) \exp\left[-j2\pi(f_X x + f_Y y)\right] \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(x', y') \exp\left\{-j2\pi[f_X(x'+a) + f_Y(y'+b)]\right\} \mathrm{d}x'\, \mathrm{d}y'$$

$$= \exp\left[-j2\pi(f_X a + f_Y b)\right] \mathbf{G}(f_X, f_Y)$$

*4. — **Théorème de Parseval.*** — Si $\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x, y)\} = \mathbf{G}(f_X, f_Y)$, on a:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int |\mathbf{g}(x, y)|^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\int |\mathbf{G}(f_X, f_Y)|^2 \mathrm{d}f_X\, \mathrm{d}f_Y$$

Démonstration:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int |\mathbf{g}(x, y)|^2 \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(x, y)\, \mathbf{g}^*(x, y)\, \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\, \mathbf{G}(\xi, \eta) \exp\left[j2\pi(x\xi + y\eta)\right]\right]$$

$$\times \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta\, \mathbf{G}^*(\alpha, \beta) \exp\left[-j2\pi(x\alpha + y\beta)\right]\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\, \mathbf{G}(\xi, \eta) \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta\, \mathbf{G}^*(\alpha, \beta)$$

$$\times \left[\int_{-\infty}^{\infty}\int \exp\left\{j2\pi[x(\xi-\alpha) + y(\eta-\beta)]\right\} \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y\right]$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\, \mathbf{G}(\xi, \eta) \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathrm{d}\alpha\, \mathrm{d}\beta\, \mathbf{G}^*(\alpha, \beta)\, \delta(\xi-\alpha, \eta-\beta)$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int |\mathbf{G}(\xi, \eta)|^2 \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta$$

*5. — **Théorème relatif à la convolution.*** — Si $\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x, y)\} = \mathbf{G}(f_X, f_Y)$

et $$\mathcal{F}\{\mathbf{h}(x, y)\} = \mathbf{H}(f_X, f_Y)$$

on a: $$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(\xi, \eta)\, \mathbf{h}(x-\xi, y-\eta)\, d\xi\, d\eta\right\} = \mathbf{G}(f_X, f_Y)\, \mathbf{H}(f_X, f_Y)$$

Démonstration:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(\xi, \eta)\, \mathbf{h}(x-\xi, y-\eta)\, d\xi\, d\eta\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(\xi, \eta)\, \mathcal{F}\{\mathbf{h}(x-\xi, y-\eta)\}\, d\xi\, d\eta$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(\xi,\eta)\, \mathbf{H}(f_X, f_Y) \exp[-j2\pi(f_X\xi+f_Y\eta)]\, d\xi\, d\eta = \mathbf{G}(f_X,f_Y)\, \mathbf{H}(f_X,f_Y)$$

*6. — **Théorème relatif à l'autocorrélation.*** — Si $\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x, y)\} = \mathbf{G}(f_X, f_Y)$ on a:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(\xi, \eta)\, \mathbf{g}^*(\xi-x, \eta-y)\, d\xi\, d\eta\right\} = |\mathbf{G}(f_X, f_Y)|^2$$

Démonstration:

$$\mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(\xi, \eta)\, \mathbf{g}^*(\xi-x, \eta-y)\, d\xi\, d\eta\right\} = \mathcal{F}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\int \mathbf{g}(\xi'+x, \eta'+y)\, \mathbf{g}^*(\xi', \eta')\, d\xi'\, d\eta'\right\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int d\xi'\, d\eta'\, \mathbf{g}^*(\xi', \eta')\, \mathcal{F}\{\mathbf{g}(\xi'+x, \eta'+y)\}$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty}\int d\xi'\, d\eta'\, \mathbf{g}^*(\xi',n') \exp[j2\pi(f_X\xi'+f_Y\eta')]\, \mathbf{G}(f_X,f_Y)$$

$$= \mathbf{G}^*(f_X, f_Y)\, \mathbf{G}(f_X, f_Y) = |\mathbf{G}(f_X, f_Y)|^2$$

*7. — **Théorème de réciprocité*[1].** — En chaque point où $\mathbf{g}$ est continue:

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}\{\mathbf{g}(x, y)\} = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}\{\mathbf{g}(x, y)\} = \mathbf{g}(x, y)$$

En chaque point où $\mathbf{g}$ est discontinue, les deux transformations successives donnent la valeur moyenne de la fonction $\mathbf{g}$ au voisinage immédiat de ce point.

Démonstration:

Soit la fonction $\mathbf{g}_R(x, y)$ définie par:

$$\mathbf{g}_R(x, y) = \int_{A_R}\int \mathbf{G}(f_X,f_Y) \exp\,[j2\pi(f_Xx+f_Yy)]\, df_X\, df_Y$$

où A_R est un cercle de rayon R, centré à l'origine du plan f_Xf_Y. Pour démontrer ce théorème, il suffit de montrer qu'en chaque point où $\mathbf{g}$ est continue:

$$\lim_{R\to\infty} \mathbf{g}_R(x, y) = \mathbf{g}(x, y)$$

---

[1] En langue anglaise ce théorème est appelé «*Fourier integral theorem*» (N.d.T.).

et qu'en chaque point où **g** est discontinue:

$$\lim_{R\to\infty} \mathbf{g}_R(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{g}_0(\theta)\, \mathrm{d}\theta$$

$\mathbf{g}_0(\theta)$ représentant la variation angulaire de **g** au voisinage immédiat du point en question.

Commençons par effectuer quelques transformations simples:

$$\mathbf{g}_R(x, y) = \iint_{A_R} \left\{ \iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\, \mathbf{g}(\xi,\eta) \exp[-j2\pi(f_X\xi+f_Y\eta)] \right\} \exp\,[j2\pi(f_Xx+f_Yy)]\, \mathrm{d}f_X\, \mathrm{d}f_Y$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\, \mathbf{g}(\xi, \eta) \iint_{A_R} \mathrm{d}f_X\, \mathrm{d}f_Y \exp\,\{j2\pi[f_X(x-\xi)+f_Y(y-\eta)]\}$$

En remarquant que:

$$\iint_{A_R} \mathrm{d}f_X\, \mathrm{d}f_Y \exp\,\{j2\pi[f_X(x-\xi)+f_Y(y-\eta)]\} = R\left[\frac{J_1(2\pi Rr)}{r}\right]$$

où $r = \sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}$, nous avons:

$$\mathbf{g}_R(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\, \mathbf{g}(\xi, \eta)\, R\left[\frac{J_1(2\pi Rr)}{r}\right]$$

Supposons d'abord que la fonction soit continue au point (x, y). S'il en est ainsi:

$$\lim_{R\to\infty} \mathbf{g}_R(x, y) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\, \mathbf{g}(\xi, \eta) \lim_{R\to\infty} R\left[\frac{J_1(2\pi Rr)}{r}\right]$$

$$= \iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\, \mathbf{g}(\xi, \eta)\, \delta(x-\xi, y-\eta) = \mathbf{g}(x, y)$$

compte tenu de la définition A-2*e*. Nous avons ainsi démontré la première partie du théorème.

Considérons maintenant un point en lequel la fonction **g** est discontinue. Sans restreindre la généralité, on peut choisir ce point à l'origine. Nous écrivons donc:

$$\mathbf{g}_R(0, 0) = \iint_{-\infty}^{\infty} \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta\, \mathbf{g}(\xi, \eta)\, R\left[\frac{J_1(2\pi Rr)}{r}\right]$$

où $r = \sqrt{\xi^2+\eta^2}$. Mais pour R suffisamment grand, la quantité entre crochets n'a de valeur appréciable qu'au voisinage immédiat de l'origine. En outre, dans ce voisi-

nage immédiat, la fonction $\mathbf{g}$ ne dépend pratiquement que de l'angle θ et par suite:

$$\mathbf{g}_R(0, 0) \cong \int_0^{2\pi} \mathbf{g}_0(\theta)\, d\theta \int_0^{\infty} rR\left[\frac{J_1(2\pi Rr)}{r}\right] dr$$

où $\mathbf{g}_0(\theta)$ représente la façon dont $\mathbf{g}$ dépend de θ autour de l'origine. En définitive, en remarquant que:

$$\int_0^{\infty} rR\left[\frac{J_1(2\pi rR)}{r}\right] = \frac{1}{2\pi}$$

on en déduit que:

$$\lim_{R \to \infty} \mathbf{g}_R(0, 0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{g}_0(\theta)\, d\theta$$

ce qui démontre la deuxième partie du théorème.

INDEX ALPHABÉTIQUE

Abbe E. 93, 95, 130
Abbe et Porter (expérience de) 130
Aberrant (formation d'images à travers un milieu) 233→239
Aberration (FTO d'un système dépourvu d') 106
Aberrations (compensation des) 238
(définition des) 110
(effets des — sur la fonction de transfert cohérente) 111
(effets des — sur la FTO) 111 et 112
Airy G. B. 59
Airy (diagramme d') 59—60, 61 119
Antennes superdirectives 122
Approximations (de Fraunhofer) 53, 57
(de Fresnel) 53, 57
(paraxiale) 75
Armstrong E. H. 133
Astigmatique (systèmes optiques — de traitement de l'information) 153
Autocorrélation (théorème relatif à l') 10, 248

Bracewell R. N. 6, 24
Bragg W. L. 179
Bragg (condition de) 218, 255
Brooks H. E. 228

Cochran G. 222
Cohérence (partielle) 97
(spatiale) 100
Collier R. J. 180, 217
Conditions aux limites 37
Continuité analytique 122
Contraste (définition du) 104
Convolution (notation abrégée) 19
(théorème relatif à la) 10
(unité de) 19, 246
Cornu (spirale de) 68
Corpusculaire (théorie — de la lumière) 29
Cutrona L. T. 136, 166
Cuve à immersion 140

Denisyuk Y. N. 224
Densité photographique 137
Développement binomial 55
Diagramme de diffraction de Fraunhofer relatif à
(une double fente) 69
(une ouverture circulaire) 59
(une ouverture rectangulaire) 58
(un réseau d'amplitude sinusoïdal) 61
(un réseau de phase sinusoidal) 64
Diagramme de diffraction de Fresnel 66→69
Diffraction (définition) 29
(par les bords) 44
(par un écran plan) 35, 39
(théorie géométrique de la)
(théorie scalaire de la) 29
(théorie vectorielle de la) 31
Diffraction (formule de Fresnel-Kirchhoff) 38
Driffield V. C. 137
Duffieux P. M. 93

Echantillonnage (théorie de l') 20
Eclairage cohérent (définition de l') 98
(représentation mathématique de l') 100
Eclairage diffus 202
Eclairage incohérent (définition de l') 98
(holographie en) 222→224
(représentation mathématique de l') 100
Effets de bords 120
Elias P. 135
El-Sum H. M. A. 179, 227
Evanescentes (ondes) 48, 100, 122

Film photographique
(caractéristique de H-D du) 137, 142, 181, 208, 209
(contraste du) 91, 137
courbe (t-E) 141, 142, 207→126
(densité du) 91, 137
(épaisseur de l'émulsion du) 217→220
(FTM du) 143→144, 202→207
(gamma du) 137
(en holographie) 181, 202→207, 207→216
(lumination du) 137
(modèle à bande passante rectangulaire) 210→215
(non linéarités) 181, 202, 207→216
(propriétés fondamentales) 136, 145
(dans un système utilisé en éclairage cohérent) 140
(dans un système utilisé en éclairage incohérent) 139

Film photographique
(transmittance en amplitude du) 140
Filtre (multiplex) 165
(de Vander Lugt) 155, 160
Filtre adapté (définition du) 161
(interprétation optique du) 161
(réalisation optique du) 164, 165
(sensibilité du) 165
(utilisation du — à la reconnaissance des caractères) 160→165
Filtre à bande passante 214
Focale (distance) 76
Fonction cercle (définition de la) 14
(TF de la) 15
Fonction δ de Dirac (définition de la) 7, 245
(propriétés de la) 24, 245
(TF de la) 8
Fonction peigne (définition de la) 14
Fonction pupillaire 94
Fonctions séparables 11
Fonction signe (définition de la) 14
Fonction sinc (définition de la) 14
Fonctions à spectre limité 20
Fonction de transfert cohérente
(définition de la) 101
(effets des aberrations sur la) 111
(exemples de) 102
(relation avec la FTO) 104
(d'un système limité par la diffaction) 102→110
(des systèmes holographiques) 206, 207
Fonction de transfert de modulation (FTM)
(effets de la FTM en holographie) 202, 207
(d'un film photographique) 136, 202, 207
(d'un système formant des images) 105
Fonction de transfert optique (FTO) 102, 110
(définition de la) 105
(effet de la défocalisation sur la) 113
(exemples) 108
(propriétés générales) 105
(relation avec la fonction de transfert cohérente) 104
(d'un système dépourvu d'aberrations) 106
Fonction triangle 14
Fourier (analyse de) 6→16
Françon M. 93
Fraunhofer (approximation de) 56
Fresnel A. 30
Fresnel (approximation de) 54
(intégrale de) 67
Fresnel-Kirchhoff (diffraction de) 35→39
Friesem A. A. 215

Gabor D. 179, 185→187, 227
Goldberg E. 145
Green (fonction de) 33
(théoréme de) 33
Grey D. S. 135
Grimaldi F. M. 29

Haines K. A. 232
Hard-clipped (filtre) 155
Harris T. L. 123
Helmholtz H. V. 32
Helmholtz (équation de) 32
(théorème de réciprocité de) 38
Hildebrand B. P. 232
Hologramme de Gabor 185→187
(limitations de l') 187
Hologramme de Leith-Upatnieks 187→202
(angle de référence minimal de l') 191
(enregistrement de l') 188
(grandissement de l') 196
(photographie tridimensionnelle par l') 196
(problèmes pratiques relatifs à l') 201
(reconstruction de l') 189
Holographie (applications de) 227, 239
(à travers un milieu aberrant) 233
(effets de l'épaisseur de l'émulsion en) 217, 220
(en lumière spatialement incohérente) 222
(des objets en mouvement) 220
(à l'aide des rayons X) 229)
(tracé des lignes de niveau par) 232
Hurter et Driffield (courbe de) 137
Huygens C. 30
Huygens (construction de l'enveloppe de) 30
Huygens-Fresnel (principe de) 38→39
(approximation du principe de) 53→57

Image (formation de l')
(dans la théorie de Abbe) 95
(en éclairage cohérent) 101→103
(en éclairage incohérent) 103→110
(en lumière non monochromatique) 97→101
(à l'aide d'une lentille mince) 84
Images jumelles 186
(séparation des) 191
Images réelles 84
virtuelles 84
Interféromètre triangulaire 222
Interférométrie 227

Keller J. B. 45
Kirchhoff G. 31, 33, 34, 35, 39
Kirchhoff (conditions aux limites de) 35, 36, 39
(théorie de la diffraction de) 31, 34, 39
Knight G. 213

Knox C. 232
Kottler F. 1
Kozma A. 141
(modèle de) 207

Labeyrie A. E. 224
Laplacien (opérateur) 32
Leith E. N. 180, 187, 224
Lentilles (coniques) 90
(convergentes) 76
(cylindriques) 90
(divergentes) 76
(minces) 73
(formule de conjugaison des) 86→88, 113
Lighthill M. J. 7
Lin L. H. 224
Linden D. A. 24
Linéarité 17
Linfoot E. H. 93
Lippmann G. 224
Lohmann A. 179, 222
Lumination 137

Mach-Zehnder (interféromètre de) 156
Maggi G. A. 45
Maréchal A. 134, 141, 150
Maxwell (équations de) 31
Mertz L. 222
Microscope (à contraste de phase) 132
Microscopie (d'objets de phase)
(méthode du champ sombre) 132, 173
(méthode du contraste de phase) 132→133
(méthode du Schlieren) 132, 174
Microscopie (en holographie) 227
Middleton D. 24
Miyamoto K. 45

Non-linéarités (du film photographique) *voir film*
Non-monochromatiques (ondes) *voir ondes*

Obliquité (facteur d') 39, 54
O'Neill E. L. 93, 135
Ondes (non-monochromatiques) 42, 51
(nombre d'ondes) 33
(quasi-monochromatiques) 99

Papoulis A. 6
Parallaxe (effets de) 197
Parseval (théorème de) 10, 247
Peterson D. P. 24
Photographie tridimensionnelle 196
Photographique voir Film photographique
Poincaré H. 31
Porter A. B. 130
Powell R. L. 230, 231
Pouvoir de résolution d'un réseau 71
Produit espace-largeur de bande
(définition du) 26
(d'un système de traitement optique) 149
Profondeur de champ 198, 227
Propagation (considérée comme un filtre linéaire) 49→51
Pseudoscopiques (images) 197
Pupille (d'entrée) 94
(de sortie) 94

Quasi-monochromatiques *voir ondes*

Radar (à ouverture synthétique) 166
Rayleigh (Lord) 93
Rayleigh-Sommerfeld (diffraction de) 29→33
Réciprocité (théorème de Helmholtz) 38
Reconnaissance des caractères 145, 160→166
Réflexion (Hologramme par) 224
Réponse impulsionnelle
(définition) 18
(d'une lentille convergente) 84→89
(synthèse de la) 148
Réseau (d'amplitude) 61→64, 125
(de diffraction) 31, 61→65, 71
(de phase) 64→65
(Pourvoir de résolution d'un) 71
(zoné de Fresnel ou de Soret) 92
Résolution
(au delà de la limite classique) 122
(de deux points) 118
(distance de Rayleigh) 118
(en éclairages cohérent et incohérent) 116
Restrick R. C. 222
Rubinowicz A. 45

Schade O. H. 93
Schlieren voir Microscopie
Schwarz (inégalité de) 106, 112, 163
Schannon C. E. 20
Similitude (théorème de) 10, 246
Sommerfeld 29, 31
(condition de rayonnement de) 36, 50
Speckle (effet de) 121
Spectre angulaire 45→50
(définition du) 46
(effet de la diffraction sur le) 48
(interprétation physique du) 45
(propagation du) 47
Stationnaire (phase) 69
Stetson K. A. 230, 231
Stroke G. W. 93, 222, 224
Systèmes linéaires 16→20

Systèmes de traitement optique (cohérents) 129→136, 150→155
(incohérents) 145→149

Thompson B. J. 232
Toraldo di Francia G. 122
Transformation de Fourier 6→16, 246→250
Transformation de Fournier-Bessel 13
(exemples) 25
Transformées (couples de) 15

Upatnieks J. 180, 187

Van der Lugt A. B. 155→166
Van Ligten R. F. 207
Vibrations (analyse des) 230
Vignetage 81, 82

Ward J. H. 232
Whittaker E. T. 20
Wolf E. 45
Wuerker R. F. 229

Young N. O. 222
Young T. 30, 39, 44, 45

Zelanka J. S. 215
Zernike F. 132, 150
Zinky W. R. 232

MASSON ET Cie, ÉDITEURS
120 Bd Saint-Germain, Paris 6e
Dépôt légal: 2e trim. 1972

Imprimé en Hongrie